28/9/09

ESAME : 2 PARTI

PARTE A → esercizi, 1 ora e mezza, divise in due durante
≥ 18 le lezioni entrambe in novembre

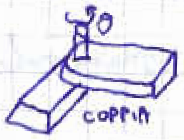
PARTE B → teoria, pre-appello a dicembre (forse), 4 domande scritte
≥ 18 da 8 punti l'una

MANIPOLATORE
/ROBOT INDUSTRIALE → struttura meccanica per spostare materiali
↳ multifunzionale → può assolvere varie funzioni
↳ riprogrammabile → anche con lo stesso utensile
Strumento il più flessibile possibile.

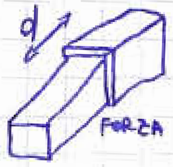
MANIPOLATORE → organo meccanico con tanti bracci interconnessi tra loro

GIUNTI → connessioni tra i bracci; divisi in due categorie:

- ROTOIDALI → i bracci si muovono grazie all'asse di rotazione; il movimento è caratterizzato dallo spostamento angolare dato dall'ANGOLO DI GIUNTO ϑ. Ad esempio le braccia.



- PRISMATICI → movimento traslatorio; caratterizzato da un OFFSET DI GIUNTO d.
Ad esempio la gru.

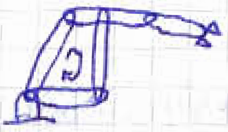


ROBOT A CATENA CINEMATICA APERTA → i bracci sono consecutivi

Più usati, più semplici

ROBOT A CATENA CINEMATICA CHIUSA → i bracci formano degli anelli

Più precisi

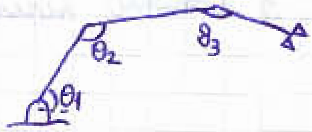


GRADI DI LIBERTÀ DI UN MANIPOLATORE → numero di movimenti indipendenti che i giunti del manipolatore possono compiere.

6 bracci consecutivi → 6 gradi di libertà

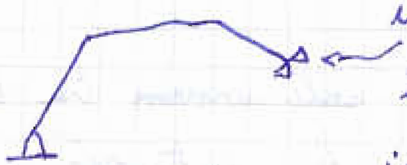
POSIZIONAMENTO DEL MANIPOLATORE

• CON ANGOLI → li collezioniamo in un vettore che rappresenta il punto nel cosiddetto SPAZIO DEI GIUNTI che caratterizza la posizione del manipolatore $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$



Se 6 giunti, 6 variabili q, o angoli o offset. Lo spazio dei giunti ha la dimensione dei gradi di libertà: $\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$

• SPAZIO OPERATIVO → più limitato, descrive solo la posizione dell'organo utensile, che è quello che fa il lavoro e quindi interessa. Coordinate cartesiane x, y, z ma anche informazioni di orientamento α, β, γ (angoli)



$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ sempre uguale, oppure minore per manipolatori piano mobile.

Problemi → relazioni tra i due spazi.

CINEMATICA DIRETTA (I compitino)

SPAZIO DEI GIUNTI → SPAZIO OPERATIVO

SPAZIO OPERATIVO → SPAZIO DEI GIUNTI

CINEMATICA INVERSA (II compitino)

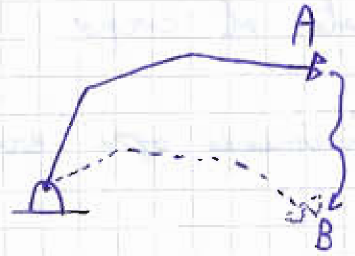
Il resto del corso verte sul problema della CINEMATICA DIFFERENZIALE DIRETTA e CINEMATICA DIFFERENZIALE INVERSA, che tratta le velocità di movimento dei giunti e dell'utensile.

Poi problemi sulla DINAMICA (diretta e inversa) DEI MANIPOLATORI, ovvero come possiamo mettere in movimento i corpi con FORZE, che traslano il corpo, e COPPIE, che ruotano il corpo.

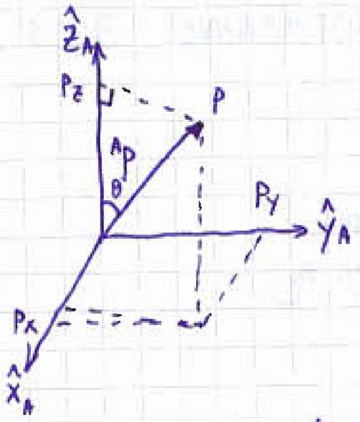
TORQUE = COPPIA

DINAMICA INVERSA → dato il vettore $\bar{q}$, le velocità $\dot{\bar{q}}$ e le accelerazioni $\ddot{\bar{q}}$, ricavare il vettore delle forze $\bar{\tau}$ (o coppie)

DINAMICA DIRETTA → data la posizione iniziale del manipolatore $\bar{q}_0$, la sua velocità iniziale $\dot{\bar{q}}_0$ e la legge della forza $\tau(t)$, ricavare posizione $\bar{q}(t)$, velocità $\dot{\bar{q}}(t)$ e accelerazione $\ddot{\bar{q}}(t)$ del manipolatore a ogni istante.



⇒ PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIE (non percorso) ⇒ percorso a cui dico a che istante di tempo toccherò i vari punti del percorso $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$



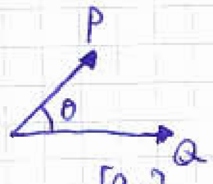
$$ {}^AP \equiv \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} $$

$\underbrace{\hat{X}_A, \hat{Y}_A, \hat{Z}_A}_{\text{versori}}$ → TERNA DI RIFERIMENTO $\{A\}$

versori → vettori a modulo unitario

I versori sono disposti secondo la regola LEVOGIRA (regola mano destra)

Come calcolo ${}^AP$? Rispolvero il concetto di prodotto scalare tra due vettori:



$$ P \cdot Q = \|P\| \cdot \|Q\| \cdot \cos\theta = P^T \cdot Q = $$

$$ P \equiv \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad Q \equiv \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \qquad = [P_x, P_y, P_z] \cdot \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z $$

terna di riferimento

$$ P_z = \|{}^AP\| \cdot \cos\theta \qquad {}^AZ_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \|{}^AZ_A\| = 1 \text{ (è un versore)} $$

angolo compreso

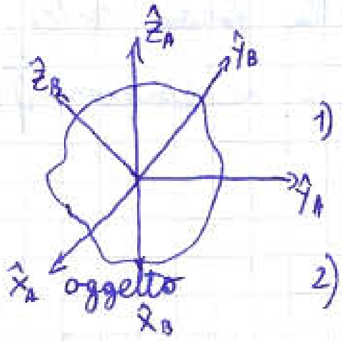
$$ \boxed{P_z = \|{}^A\hat{Z}_A\| \cdot \|{}^AP\| \cdot \cos\theta = {}^AP \cdot {}^A\hat{Z}_A} $$

$$\boxed{\begin{aligned} P_x &= {}^AP \cdot {}^A\hat{X}_A \\ P_y &= {}^AP \cdot {}^A\hat{Y}_A \\ P_z &= {}^AP \cdot {}^A\hat{Z}_A \end{aligned}}$$

$$\boxed{{}^AP \cdot {}^AQ = {}^BP \cdot {}^BQ}$$ vettori descritti rispetto a terne differenti

per definizione

ORIENTAMENTO



1) fisso una terna di riferimento immobile A

2) fisso una seconda terna B fissata al corpo

3) esprimo l'orientamento di B rispetto ad A, esprimendo ogni versore di B e lo esprimo rispetto ad A:

$$\left[{}^A\hat{X}_B \;\middle|\; {}^A\hat{Y}_B \;\middle|\; {}^A\hat{Z}_B \right] = {}^A_BR = \text{MATRICE DI ROTAZIONE } 3 \times 3$$

$${}^A_BR = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

non specifico la terna di descrizione tanto ${}^AP \cdot {}^AQ = {}^BP \cdot {}^BQ$

Matrice di rotazione che descrive l'orientamento di B rispetto ad A.

$${}^B_AR = \left[{}^B\hat{X}_A \;\middle|\; {}^B\hat{Y}_A \;\middle|\; {}^B\hat{Z}_A \right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix} = {}^A_BR^T$$

${}^A_BR^{-1} = {}^A_BR^T$ dimostrazione:

$${}^A_BR^T \cdot {}^A_BR = I_d$$

$$\begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B \\ \hline {}^A\hat{Y}_B \\ \hline {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} \cdot \left[{}^A\hat{X}_B \;\middle|\; {}^A\hat{Y}_B \;\middle|\; {}^A\hat{Z}_B \right] = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \\ {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Y}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \\ {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \cdot {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} =$$

$${}^A\hat{X}_B \cdot {}^A\hat{X}_B = \underbrace{\|{}^AX_B\|}_{1} \cdot \underbrace{\|{}^AX_B\|}_{1} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{1}$$

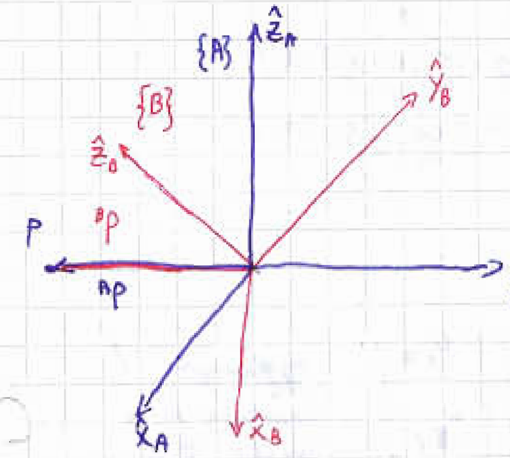
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

30/9/09

È possibile fare operazioni tra vettori solo se questi sono descritti rispetto alla stessa terna.

USI DELLA MATRICE DI ROTAZIONE

- Cambio di descrizione di un punto rispetto a due terne con origine coincidente:



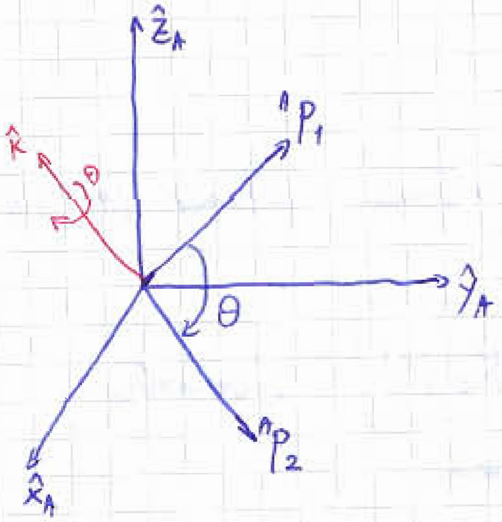
$$\boxed{{}^AP = {}^A_BR \cdot {}^BP}$$

Dim.

$${}^AP = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{P} \\ \hat{Y}_A \cdot \hat{P} \\ \hat{Z}_A \cdot \hat{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_A^T \cdot {}^AP \\ {}^A\hat{Y}_A^T \cdot {}^AP \\ {}^A\hat{Z}_A^T \cdot {}^AP \end{bmatrix} \overset{\text{proprietà}}{=} \begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \cdot {}^BP \\ {}^B\hat{Y}_A^T \cdot {}^BP \\ {}^B\hat{Z}_A^T \cdot {}^BP \end{bmatrix} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} {}^B\hat{X}_A^T \\ {}^B\hat{Y}_A^T \\ {}^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}}^{\text{matrice } 3\times 3}}_{\text{matrice di rotazione}} \cdot {}^BP =$$

$$= {}^B_AR^T \cdot {}^BP \overset{\text{proprietà}}{=} {}^A_BR \cdot {}^BP \quad \blacksquare$$

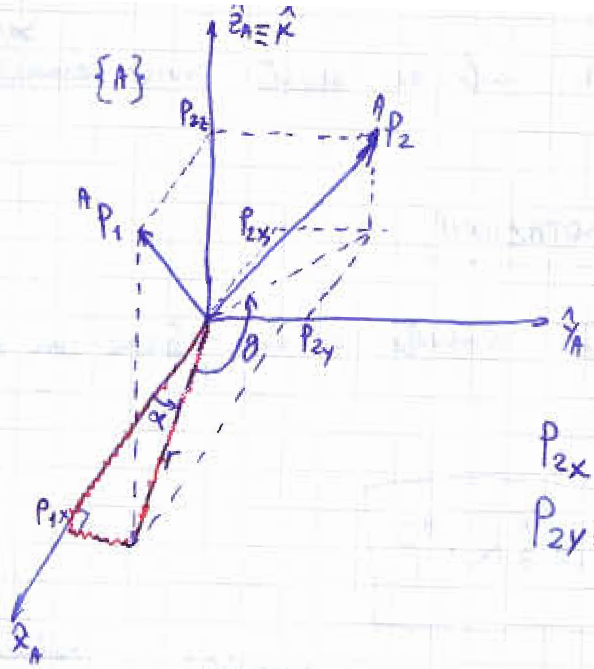
- Rotazione di vettori



Vogliamo ruotare $^AP_1$ rispetto all'asse $\hat{K}$ di un angolo θ.

$${}^AP_2 = \underbrace{R_K(\theta)}_{\text{operatore di rotazione}} \cdot {}^AP_1$$

Ricavo la matrice di rotazione considerando $\hat{z}$ come asse di rotazione (più semplice da dimostrare)



$$^AP_2 = R_z(\theta)\,^AP_1$$

$$P_{2z} = P_{1z}$$

$P_{1x} = r\cdot\cos\alpha \qquad P_{2x} = r\cdot\cos(\alpha+\theta)$ non dimostr

$P_{1y} = r\cdot\text{sen}\,\alpha \qquad P_{2y} = r\cdot\text{sen}(\alpha+\theta)$

$$P_{2x} = r\cos\alpha\cos\theta - r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta$$

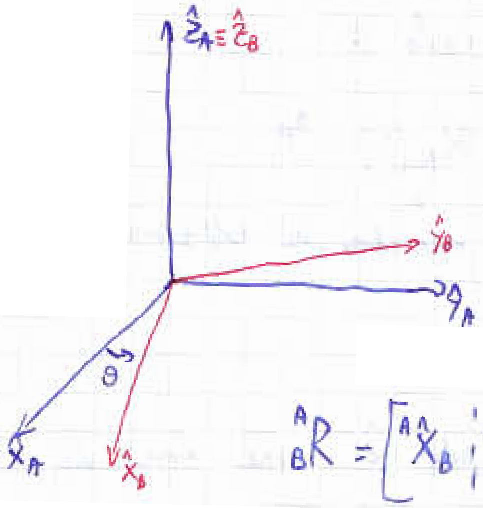
$$P_{2y} = r\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta$$

$$P_{2x} = P_{1x}\cos\theta - P_{1y}\,\text{sen}\,\theta$$
$$P_{2y} = P_{1y}\cos\theta + P_{1x}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix}$$

aggiungo le informazioni sulla z

$$\boxed{\begin{bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} \qquad ^AP_2 = R_z(\theta) \cdot {}^AP_1}$$



{B} è ottenuta ruotando {A} rispetto a $\hat{z}$.

$$\boxed{^A_BR = R_z(\theta)}$$

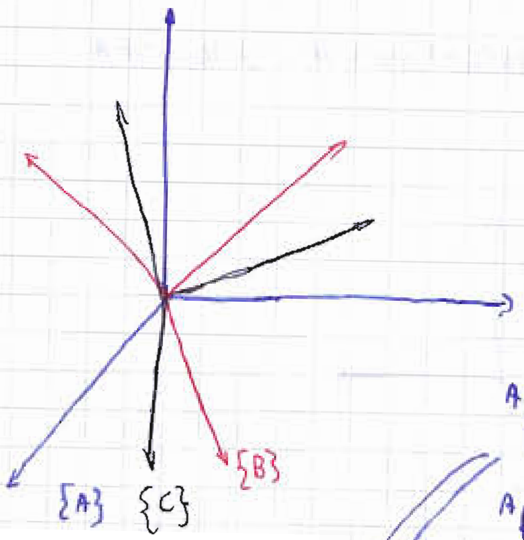
Dimostro:

$$^A_BR = \left[\,^A\hat{X}_B \,\vdots\, ^A\hat{Y}_B \,\vdots\, ^A\hat{Z}_B\,\right] \overset{\text{come prima}}{=} \left[\,R_z(\theta)\cdot{}^A\hat{X}_A \,\vdots\, R_z(\theta)\cdot{}^A\hat{Y}_A \,\vdots\, R_z(\theta)\,^A\hat{Z}_A\,\right] =$$

$$= R_z(\theta)\cdot\left[\,^A\hat{X}_A \,\vdots\, ^A\hat{Y}_A \,\vdots\, ^A\hat{Z}_A\,\right] = R_z(\theta)\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_d} = R_z(\theta) \blacksquare$$

• Descrivere una terna rispetto a un'altra.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Dati

$^{B}_{A}R$ e $^{B}_{C}R$

$\searrow \quad \swarrow$

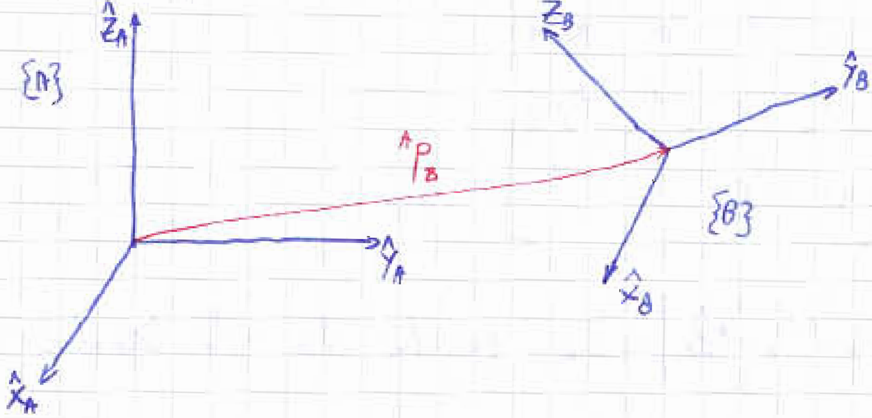
$^{A}_{C}R$?

$$^{A}P = {}^{A}_{C}R \cdot {}^{C}P \qquad {}^{B}P = {}^{B}_{C}R \cdot {}^{C}P$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}P$$

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{C}_{B}R \cdot {}^{C}P \quad \Longrightarrow \quad \boxed{{}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}_{C}R}$$

Finora abbiamo parlato di terne coincidenti. Passiamo ora a parlare di terne nello spazio.



$^{A}_{B}R \rightarrow$ matrice di rotazione
$^{A}P_B \rightarrow$ vettore che unisce le due origini

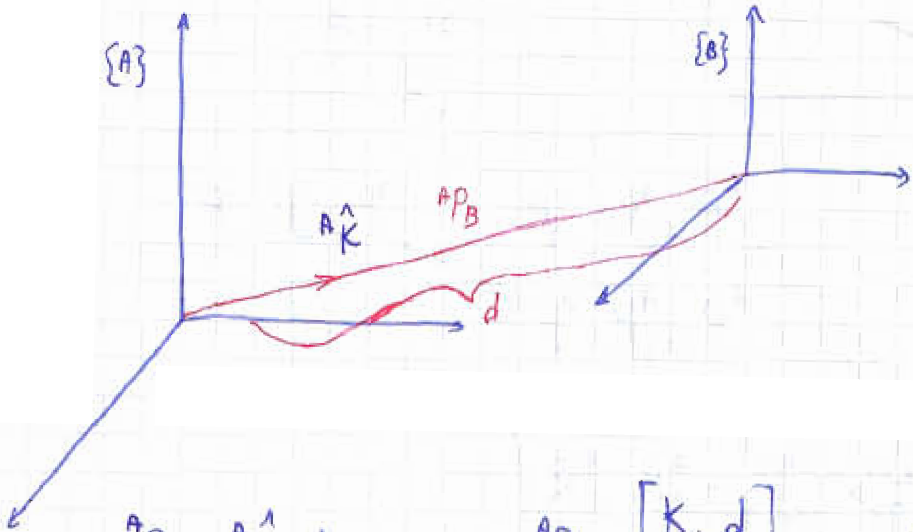
$\Big] \rightarrow$ descrivono la terna B rispetto alla A

$^{A}_{B}R$ e $^{A}P_B$ li posso unire per ottenere la MATRICE DI TRASFORMAZIO OMOGENEA che descrive la terna B rispetto alla terna A.

$$
{}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]_{4\times4}
$$

USO DELLA MATRICE DI TRASFORMAZIONE OMOGENEA

· traslazione di una terna

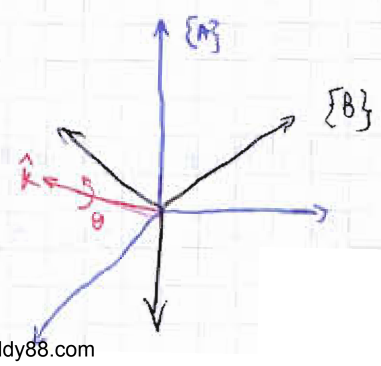


$$
{}^{A}P_{B} = {}^{A}\hat{K}\, d \qquad {}^{A}P_{B} = \begin{bmatrix} K_x d \\ K_y d \\ K_z d \end{bmatrix} \qquad {}^{A}\hat{K} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}T = T_K(d) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & K_x d \\ 0 & 1 & 0 & K_y d \\ 0 & 0 & 1 & K_z d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

${}^{A}_{B}R = \left[{}^{A}\hat{X}_{B} \,|\, {}^{A}\hat{Y}_{B} \,|\, {}^{A}\hat{Z}_{B} \right] = \left[{}^{A}\hat{X}_{A} \,|\, {}^{A}\hat{Y}_{A} \,|\, {}^{A}\hat{Z}_{A} \right] = I_d$ perché ho solo traslato la terna.

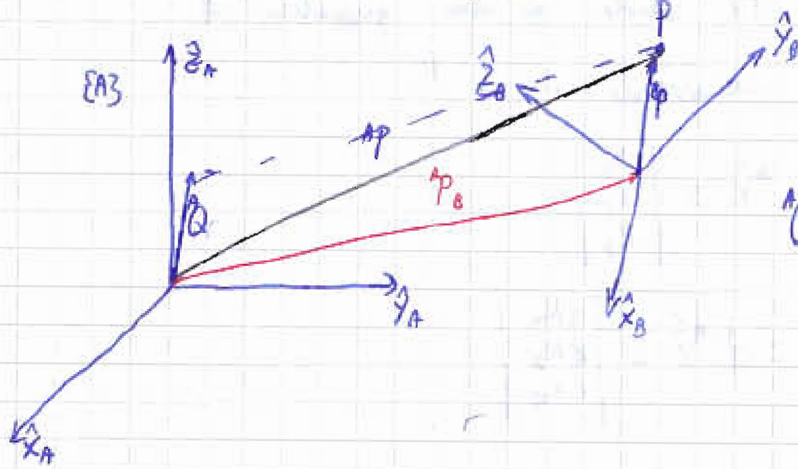
· rotazione di una terna rispetto a un asse K



$$
{}^{A}_{B}T = T_K(\theta) = \left[\begin{array}{c|c} R_K(\theta) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right]
$$

origine coincidente

• espressione di un punto rispetto a un'altra terna

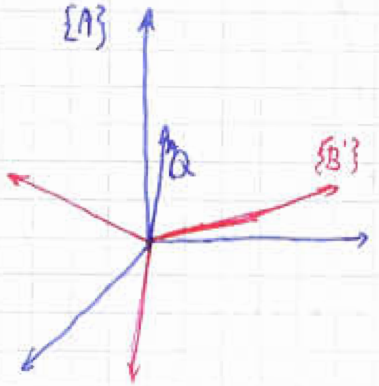


Dato ^BP voglio ^AP

^AQ è ottenuto traslando ^BP

$$^AP = {^AQ} + \underset{\uparrow \text{dato}}{^AP_B}$$

Per capire quanto vale ^AP traslo {B} sopra ad {A}



$$^AQ = {^A_{B'}R}\, {^{B'}P}$$

$$^A_BR = {^A_{B'}R} \quad \text{perchè } B' \text{ è pura traslazione di } B$$

$$^AQ = {^A_BR} \cdot {^{B'}P}$$

$$^{B'}P = {^BP} \quad \text{perchè vettore e terna sono ottenuti per traslazione}$$

$$^AQ = {^A_BR} \cdot {^BP} \Rightarrow \boxed{^AP = \underset{\uparrow\text{NOTO}}{{^A_BR}} \cdot {^BP} + \underset{\uparrow\text{NOTO}}{^AP_B}}$$

formula non omogenea
non mi piace

Ridefinisco il vettore di posizione $\quad {^A\bar{P}} = \begin{bmatrix} ^AP \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad {^B\bar{P}} = \begin{bmatrix} ^BP \\ \hline 1 \end{bmatrix}$

$$^A_BT \cdot {^B\bar{P}} = \left[\begin{array}{c|c} ^A_BR & ^AP_B \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} ^BP \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^A_BR \cdot {^BP} + {^AP_B} \\ \hline 1 \end{bmatrix} = {^A\bar{P}}$$

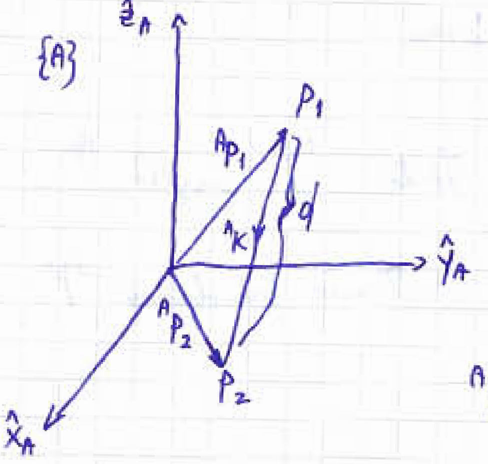
la considero 2x2

$$\boxed{^A\bar{P} = {^A_BT} \cdot {^B\bar{P}}}$$

In questo caso sto usando un operatore omogeneo
$\Rightarrow$ OK

Successivamente $^AP \equiv {^A\bar{P}}$: se lo moltiplico per una matrice 4x4, finirò con 1.

5/10/2009



P_1 trasla di una quantità d arrivando in P_2

$$^A\hat{K} \equiv \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

$$^AK = d\ ^A\hat{K} \equiv \begin{bmatrix} dk_x \\ dk_y \\ dk_z \end{bmatrix}$$

$^AP_2 = {^AP_1} + {^AK}$ operatore non omogeneo; voglio un operatore omogeneo.

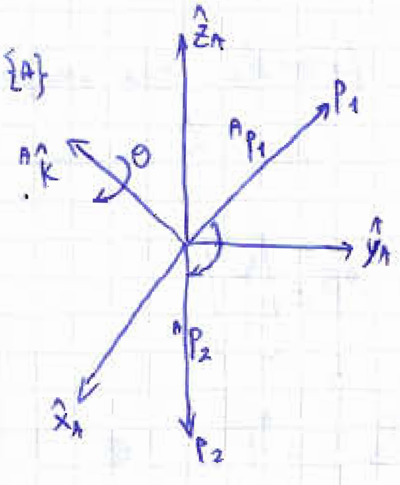
Idea: matrice di trasformazione omogenea

$$^AP_2 = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} & I_3 & & ^AK \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{T_K(d)} \cdot \left[\begin{array}{c} ^AP_1 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ^AP_1 + {^AK} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ^AP_2 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$^AP_2 = T_K(d)\ ^AP_1$$

Traslazione di un vettore

- Rotazione di vettori

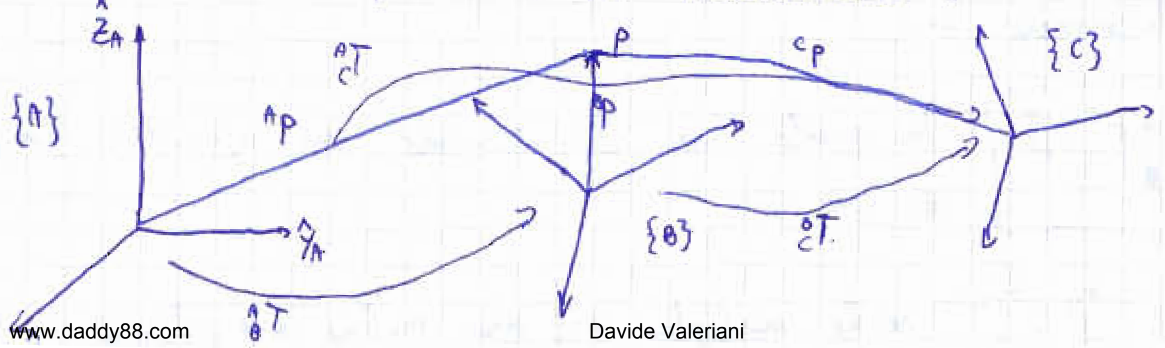


Con le matrici di rotazione, $^AP_2 = R_K(\theta)\ ^AP_1$

Con la matrice di trasformazione:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} & R_K(\theta) & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{T_K(\theta)} \left[\begin{array}{c} ^AP_1 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

COMPOSIZIONI DI TRASFORMAZIONI



Conosco ${}^A_BT$, matrice di trasformazione omogenea che descrive la terna B rispetto alla terna A, e la ${}^B_CT$. Quanto vale ${}^A_CT$?

Prendo un punto P e lo descrivo rispetto alle tre terne.

$$\left.\begin{array}{l} {}^AP = {}^A_CT\,{}^CP \\ {}^BP = {}^B_CT\,{}^CP \\ {}^AP = {}^A_BT\,{}^BP \end{array}\right] \Longrightarrow {}^AP = \underbrace{{}^A_BT \cdot {}^B_CT}_{{}^A_CT} \cdot {}^CP$$

T-B-A

$$\boxed{{}^A_CT = {}^A_BT \cdot {}^B_CT}$$ come per le matrici di rotazione

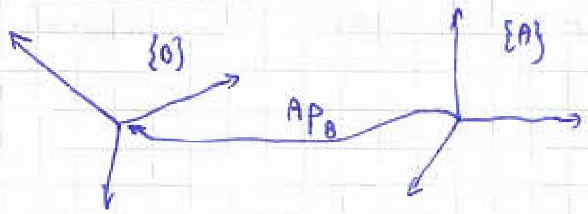
Conosco ${}^A_BT = \left[\begin{array}{c|c} {}^A_BR & {}^AP_B \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$ e voglio sapere ${}^B_AT = \left[\begin{array}{c|c} {}^B_AR & {}^BP_A \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$

$${}^A_BT \cdot {}^B_AT = {}^A_AT = I_d \Longrightarrow \boxed{{}^B_AT = \left({}^A_BT\right)^{-1}}$$

come appena visto

Con le matrici di rotazione, ${}^A_BR^{-1} = {}^B_AR^T$, ora non vale

$${}^B_AT = \left[\begin{array}{c|c} {}^A_BR^T & -{}^A_BR^T \cdot {}^AP_B \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$$



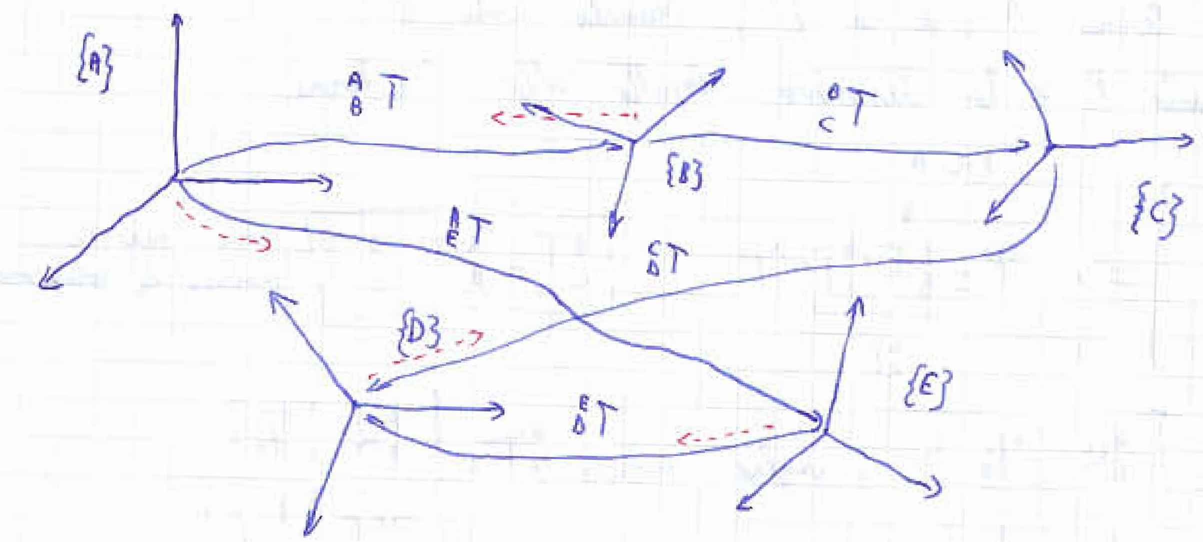
${}^AP_B$ descrive l'origine di B rispetto alla terna A.

${}^B_AT \cdot {}^A\bar{P}_B$ descrive l'origine di B rispetto alla terna B, cioè è 0.

$${}^B_AT \cdot {}^A\bar{P}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^B_AR & {}^BP_A \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} {}^AP_B \\ \hline 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^B_AR\,{}^AP_B + {}^BP_A = 0 \quad {}^BP_A = -{}^B_AR\,{}^AP_B$$

$$\boxed{{}^BP_A = -{}^A_BR^T \cdot {}^AP_B}$$

EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE



$^A_D T = {}^A_E T \, {}^E_D T$ oppure $^A_D T = {}^A_B T \cdot {}^B_C T \, {}^C_D T$ uguagliandole ottengo

$$^A_E T \, {}^E_D T = {}^A_B T \, {}^B_C T \, {}^C_D T$$

Suppongo di non conoscere $^B_C T$ e di volerla ricavare

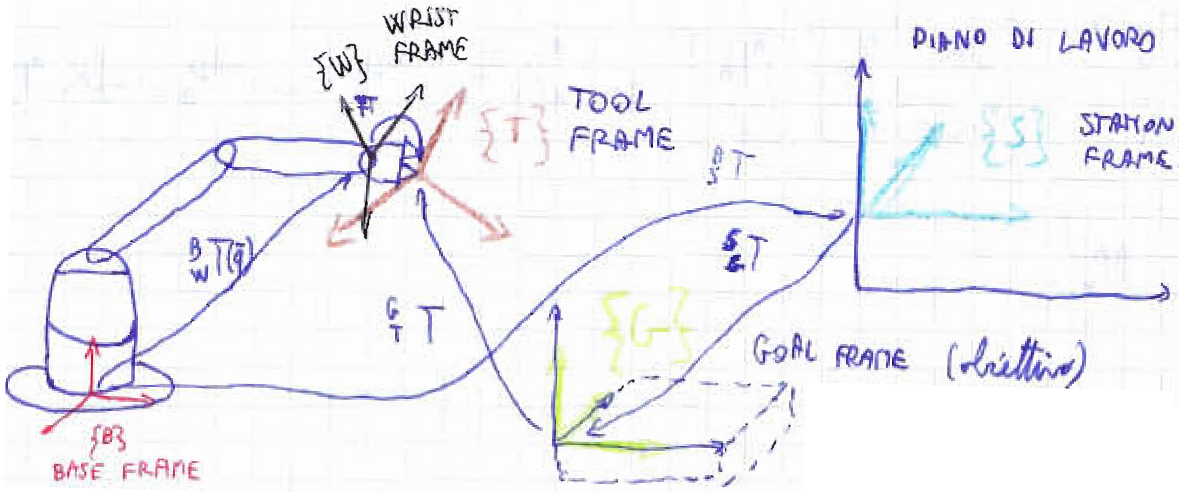
$$^A_B T^{-1} \, {}^A_E T \, {}^E_D T \, {}^C_D T^{-1} = \underbrace{{}^A_B T^{-1} \, {}^A_B T}_{Id} \, {}^B_C T \, \underbrace{{}^C_D T \, {}^C_D T^{-1}}_{Id}$$

non scambiare l'ordine dei prodotti

Metodo più pratico: percorro il grafo dalla coda dell'incognita:

- freccia opposta → matrice inversa
- freccia concorde → matrice normale

fino ad arrivare alla punta della freccia



Di solito, conosco ${}^{B}_{S}T$, ${}^{S}_{G}T$, ${}^{B}_{W}T(\bar{q})$, ${}^{W}_{T}T$.
↖ dipende dalla posizione dei giunti

L'incognita è di solito ${}^{G}_{T}T$.

$$\boxed{{}^{G}_{T}T = \left({}^{S}_{G}T\right)^{-1} \left({}^{B}_{S}T\right)^{-1} \, {}^{B}_{W}T(\bar{q}) \, {}^{W}_{T}T}$$

NOTAZIONI MINIME DELL'ORIENTAMENTO

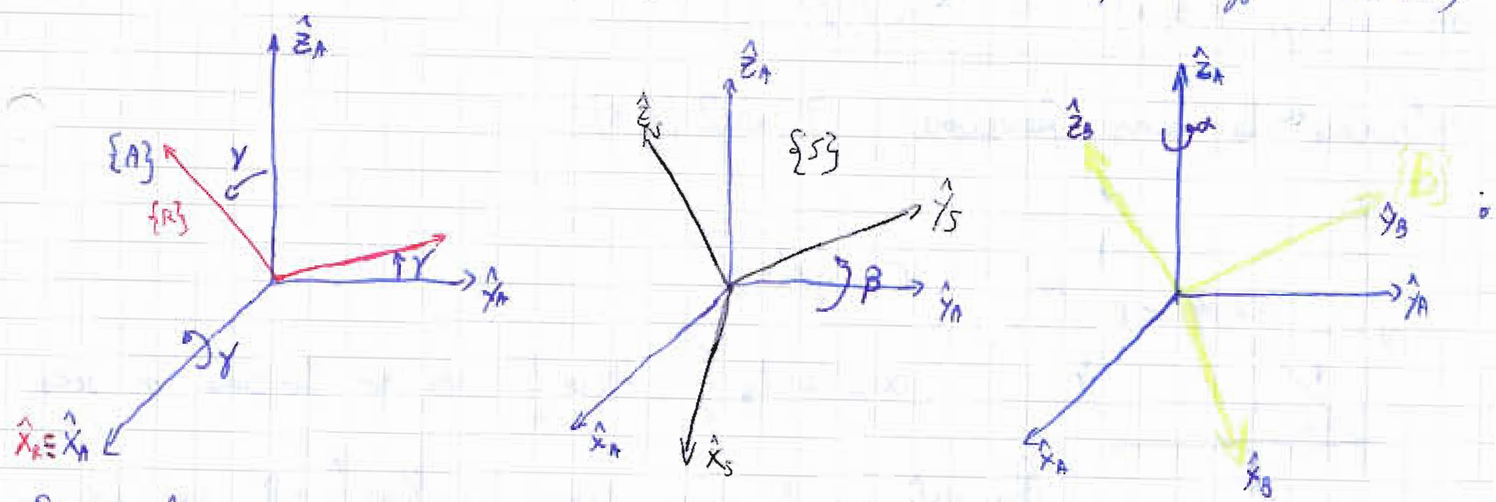
$$\underbrace{{}^{A}_{B}R = \left[{}^{A}\hat{X}_B \,\vdots\, {}^{A}\hat{Y}_B \,\vdots\, {}^{A}\hat{Z}_B\right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}}_{\text{ridondante}}$$

Ma nella prima lezione avevamo detto che bastavano 3 elementi (angoli) per descrivere l'orientamento

$$\|{}^{A}\hat{X}_B\| = 1 \qquad {}^{A}\hat{X}_B \cdot {}^{A}\hat{Y}_B = 0$$
$$\|{}^{A}\hat{Y}_B\| = 1 \qquad {}^{A}\hat{Y}_B \cdot {}^{A}\hat{Z}_B = 0$$
$$\|{}^{A}\hat{Z}_B\| = 1 \qquad {}^{A}\hat{Z}_B \cdot {}^{A}\hat{X}_B = 0$$

6 equazioni che legano i 9 elementi
$\Rightarrow$ 3 gradi di libertà

- ASSI FISSI o RPY (Roll Pitch Yaw) = rollio, beccheggio, imbardata)



Ruoto la terna A rispetto all'asse X. ROLLIO BECCHEGGIO IMBARDATA

Ogni angolo ha un segno, che si determina con la regola della mano destra: pollice come il vettore, dita nel verso positivo.

Problemi: $(\alpha, \beta, \gamma) \Longleftrightarrow R$???

DA (α, β, γ) A ${}^A_B R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha)$

$$ {}^A_R R = R_x(\gamma) $$

$$ {}^A_S R = {}^A_R R \; {}^R_S R = R_x(\gamma) \; R_y(\cancel{-\beta}) $$ NO

Ho ruotato rispetto a $\hat{y}_A$, non rispetto a $\hat{y}_R$.
ruotato

$$ {}^A\hat{z}_R = R_x(\gamma) \cdot {}^A\hat{z}_A $$

$$ {}^A\hat{z}_S = R_y(\beta) \, {}^A\hat{z}_R $$ per le proprietà viste (rotazione di un vettore rispetto al versore)

$$ {}^A\hat{z}_B = R_z(\alpha) \, {}^A\hat{z}_S $$

$$ {}^A\hat{z}_B = R_z(\alpha) \, R_y(\beta) \, R_x(\gamma) \, {}^A\hat{z}_A $$ e analogamente

$$ {}^A\hat{y}_B = R_z(\alpha) \, R_y(\beta) \, R_x(\gamma) \, {}^A\hat{y}_A $$

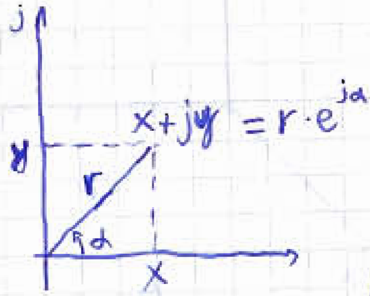
$$ {}^A\hat{x}_B = R_z(\alpha) \, R_y(\beta) \, R_x(\gamma) \, {}^A\hat{x}_A $$

$$ \boxed{ {}^A_B R = \left[{}^A\hat{x}_B \; \vdots \; {}^A\hat{y}_B \; \vdots \; {}^A\hat{z}_B \right] = R_z(\alpha) \, R_y(\beta) \, R_x(\gamma) \underbrace{\left[{}^A\hat{x}_A \; \vdots \; {}^A\hat{y}_A \; \vdots \; {}^A\hat{z}_A \right]}_{Id} = \underbrace{R_z(\alpha)}_{3^a \text{ rot.}} \, \underbrace{R_y(\beta)}_{2^a \text{ rot.}} \, \underbrace{R_x(\gamma)}_{1^a \text{ rot.}} } $$

L'ordine del prodotto è inverso rispetto a quello usato per fare le rotazioni.

DA ${}^A_B R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha)$ A (α, β, γ)

Introduco la nuova funzione $Atan2(y, x)$.

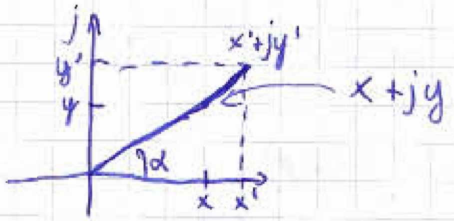


$$ r = \sqrt{x^2 + y^2} $$

$$ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = Atan \frac{y}{x} $$ che non funziona se $x < 0$

Per sistemare le cose uso $\alpha = Atan \frac{y}{x} + \pi$ per $x < 0$

$$ \boxed{ \underset{\text{2 argomenti}}{Atan2}(y, x) = \begin{cases} Atan(y, x) & \text{per } x \geq 0 \\ Atan(y, x) + \pi & \text{per } x < 0 \end{cases} } $$



Scrivo un numero in cui

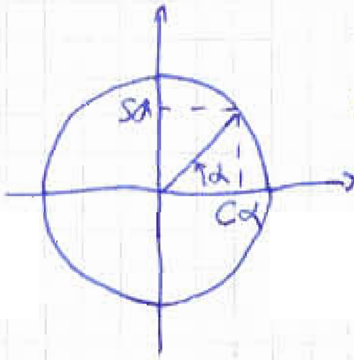
$x' = kx$

$y' = ky$ $\quad k>0$

$$x' + jy' = kx + jky \qquad Atan2(y,x) = Atan2(y',x')$$

$$\boxed{Atan2(y,x) = Atan2(ky, kx)}$$

Nel nostro caso, dimentichiamoci dei numeri complessi e disegnamo un cerchio trigonometrico



$s\alpha = \text{sen}\,\alpha$

$c\alpha = \cos\alpha$

α ? $\qquad \alpha = Atan2(s\alpha, c\alpha)$

Torniamo al problema $\quad {}^A_B R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) \longrightarrow \alpha, \beta, \gamma$

$${}^A_B R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta \cdot s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

mi concentro qui

$${}^A_B R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} r_{11} = c\alpha c\beta \\ r_{21} = s\alpha c\beta \\ r_{31} = -s\beta \end{cases} \xRightarrow{\text{elevo al quadrato}} \begin{cases} r_{11}^2 = c^2\alpha\, c^2\beta \\ r_{21}^2 = s^2\alpha\, c^2\beta \\ r_{31} = -s\beta \end{cases}$$ sommo

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = c^2\beta \underbrace{\left[c^2\alpha + s^2\alpha\right]}_{1} = c^2\beta \Rightarrow \begin{cases} c\beta = \pm\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} \\ s\beta = -r_{31} \end{cases}$$

soluzione del problema <u>NON</u> univoca

SOL 1 : $c\beta > 0$

intervallo aperto perché in $\pm\frac{\pi}{2}$ problemi

$$\begin{cases} c\beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} & \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ s\beta = -r_{31} \end{cases} \Rightarrow \beta = Atan2(s\beta, c\beta) = Atan2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\begin{cases} r_{11} = c\alpha\, c\beta \\ r_{21} = s\alpha\, c\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\alpha = \frac{r_{11}}{c\beta} \\ s\alpha = \frac{r_{21}}{c\beta} \end{cases} \quad \alpha = Atan2\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right) = Atan2(r_{21}, r_{11})$$

per scalatura (proprietà di Atan2 essendo $c\beta > 0$)

$$\begin{cases} r_{32} = c\beta\, s\gamma \\ r_{33} = c\beta\, c\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\alpha = \frac{r_{32}}{c\beta} \\ c\alpha = \frac{r_{33}}{c\beta} \end{cases} \quad \gamma = Atan2\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right) = Atan2(r_{32}, r_{33})$$

SOL 2 : $c\beta < 0$

$$\begin{cases} c\beta = -\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} & \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \\ s\beta = -r_{31} \end{cases} \Rightarrow \beta = Atan2\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

scalatura

$$\alpha = Atan2\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right) = Atan2(-r_{21}, -r_{11})$$

$$\gamma = Atan2\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right) = Atan2(-r_{32}, -r_{33})$$

CASI PARTICOLARI

$$c\beta = 0 \Rightarrow 1)\ \beta = \frac{\pi}{2} \qquad {}^{A}_{B}R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\gamma \\ 0 & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & s(\gamma-\alpha) & c(\gamma-\alpha) \\ 0 & c(\gamma-\alpha) & -s(\gamma-\alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_{12} = sen(\gamma-\alpha) \\ r_{22} = cos(\gamma-\alpha) \end{matrix} \Rightarrow \gamma - \alpha = Atan2(r_{12}, r_{22})$$

scelgo α a piacere (∞^1 sol.)

$$\begin{bmatrix} \alpha = \text{qualunque} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \\ \gamma = \alpha + Atan2(r_{12}, r_{22}) \end{bmatrix}$$

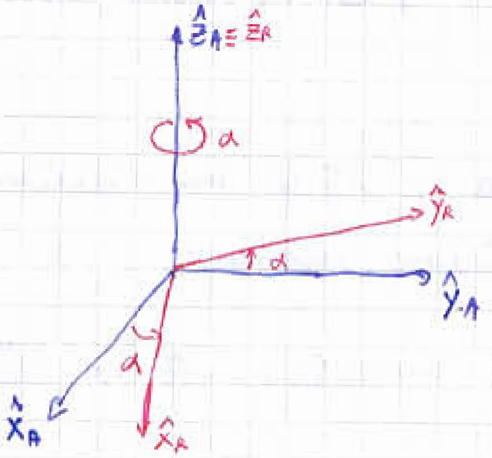
2) $\beta = -\frac{\pi}{2}$ $\quad {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha =$ qualunque

$\beta = -\frac{\pi}{2}$

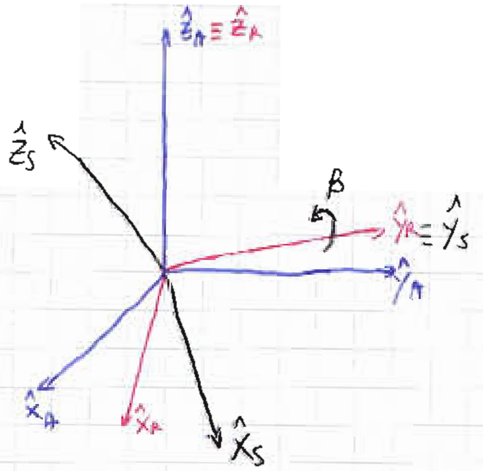
$\gamma = -\alpha + \mathrm{Atan2}(-r_{12}, r_{22})$

- ANGOLI DI EULERO o ASSI MOBILI



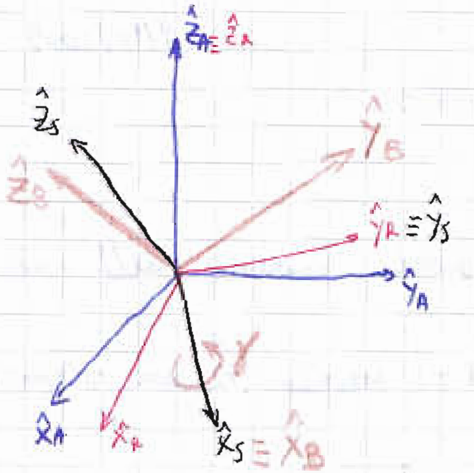
Ruoto attorno all'asse $\hat{z}_A$

${}^{A}_{R}R = R_z(\alpha)$



Ruoto attorno all'asse $\hat{y}_R$, comune con $\{S\}$

${}^{R}_{S}R = R_y(\beta)$ è per questo che vale questa relazione



Ruoto attorno all'asse $\hat{x}_S$, comune con $\{B\}$

${}^{S}_{B}R = R_x(\gamma)$

Gli assi di rotazione sono in questo caso mobili

$${}^{A}_{B}R_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^{A}_{R}R \cdot {}^{R}_{S}R \cdot {}^{S}_{B}R$$ proprietà di composizione

apice = assi mobili

note

$$\boxed{{}^{A}_{B}R_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_x(\gamma)}$$ stesso ordine tra matrici e rotazioni

PROPRIETÀ:

Tre rotazioni realizzate intorno ad assi fissi portano allo stesso orientamento finale ottenibile dalle stesse tre rotazioni prese in ordine inverso attorno ad assi mobili.

Posso scegliere una sequenza di rotazioni diversa e otterrò uno orientamento diverso, con un'altra matrice e un'altra notazione minima.

Non posso mai ruotare per due volte consecutive attorno allo stesso asse.

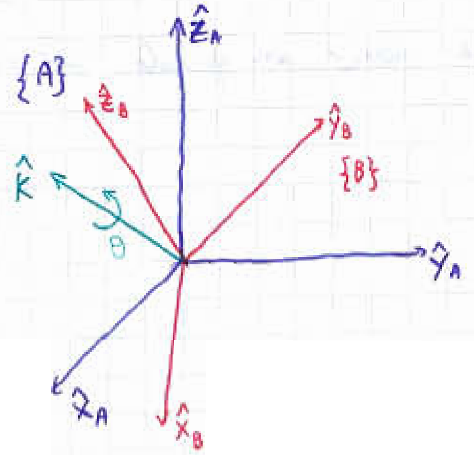
Elenco notazioni minime: 12.

$\boxed{XYZ}$	YZX	$\boxed{ZYX}$	più frequenti
XZY	YXZ	ZXY	
XYX	YXY	ZXZ	
XZX	YZY	$\boxed{ZYZ}$	

$${}^{A}_{B}R_{yzx}(\alpha,\beta,\gamma) = R_x(\gamma)\,R_z(\beta)\,R_y(\alpha)$$

7/10/2009

RAPPRESENTAZIONE ASSE-ANGOLO



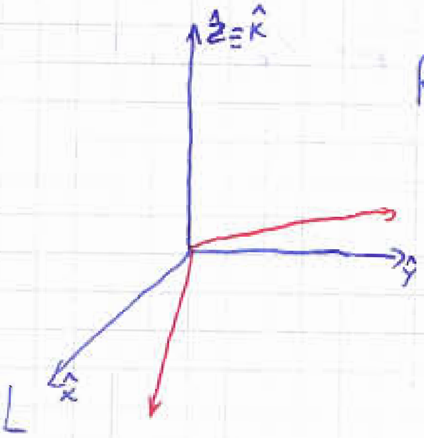
$\hat{k}, \theta \rightarrow$ rappresentazione minima dell'orientam

$\hat{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$ ma $\|\hat{k}\| = 1$ essendo K un versore

Rappresentazione a 4 elementi ma con 3 gradi di libertà.

Dato $\hat{k}, \theta \longrightarrow {}^A_B R_K(\theta)$

Caso particolare:



$R_K(\theta) = R_z(\theta)$

Senza dimostrarlo, so che

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} K_x^2 v\theta + c\theta & K_x K_y v\theta - K_z s\theta & K_x K_z v\theta + K_y s\theta \\ K_x K_y v\theta + K_z s\theta & K_y^2 v\theta + c\theta & K_y K_z v\theta - K_x s\theta \\ K_x K_z v\theta - K_y s\theta & K_y K_z v\theta + K_x s\theta & K_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

dove $v\theta = 1 - c\theta$, $c\theta = \cos\theta$, $s\theta = \operatorname{sen}\theta$

Data ${}^A_B R_K(\theta) \longrightarrow \hat{k}, \theta$

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad r_{11} + r_{22} + r_{33} = v\theta \underbrace{(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)}_{\|K\|^2 = 1} + 3c\theta =$$

$$= 1 - c\theta + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

$$c\theta = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}$$

Mi piacerebbe trovare anche $s\theta$, ma rigirando quelle equazioni non ci si riesce.

$$\theta = \pm \arccos \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}$$

che non vale però per tutti i quadranti. Se metto un $\pm$ però tutto funziona

Doppia soluzione $\Rightarrow$ problema.

Trovo le altre componenti:

$$r_{21}-r_{12} = 2K_z S\theta \Rightarrow K_z = \frac{r_{21}-r_{12}}{2S\theta}$$

siccome ho due valori diversi per θ, ci saranno due valori anche per K_z, K_y e K_x

$$r_{13}-r_{31} = 2K_y S\theta \Rightarrow K_y = \frac{r_{13}-r_{31}}{2S\theta}$$

$$r_{32}-r_{23} = 2K_x S\theta \Rightarrow K_x = \frac{r_{32}-r_{23}}{2S\theta}$$

CASI PARTICOLARI

$\theta = 0 \Rightarrow S\theta = 0$

rotazione nulla

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice identità

$\Downarrow$

va bene un K qualunque

$\theta = \pi \Rightarrow S\theta = 0$

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} 2K_x^2-1 & 2K_xK_y & 2K_xK_z \\ 2K_xK_y & 2K_y^2-1 & 2K_yK_z \\ 2K_xK_z & 2K_yK_z & 2K_z^2-1 \end{bmatrix}$$

matrice simmetrica

$$r_{11} = 2K_x^2 - 1 \Rightarrow |K_x| = \sqrt{\frac{r_{11}+1}{2}}$$

$$r_{22} = 2K_y^2 - 1 \Rightarrow |K_y| = \sqrt{\frac{r_{22}+1}{2}}$$

$$r_{33} = 2K_z^2 - 1 \Rightarrow K_z = \sqrt{\frac{r_{33}+1}{2}}$$

L'angolo θ che considero va da $-\pi$ a π, mentre K è qualsiasi.

RAPPRESENTAZIONE QUATERNIONE UNITARIO

Chiamata anche "PARAMETRI DI EULERO" (non angoli!!), che sono 4.

$$\varepsilon_1 = K_x \cdot \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_2 = K_y\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_3 = K_z\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \qquad \varepsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2}$$

Dove K_x, K_y, K_z sono le componenti di $\vec{K}$ del caso precedente.

VANTAGGI

- una sola soluzione di θ
- una sola singolarità

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \qquad \|\varepsilon\| = \sqrt{\underbrace{(K_x^2 + K_z^2 + K_y^2)}_{\|K\|^2 = 1} \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}_{1}} = 1$$

$\Rightarrow \varepsilon$ è un versore!!

I gradi di libertà sono ancora 3.

Dati $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \longrightarrow {}^A_B R_\varepsilon$. Prendo la matrice senza dimostrarla

$${}^A_B R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

Data ${}^A_B R_\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$

$$r_{11}+r_{22}+r_{33} = 3-4(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) \overset{+1-1}{=} 4-4(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)-1 = 4\underbrace{(1-\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2-\varepsilon_3^2)}_{\varepsilon_4^2}-1$$

$$\varepsilon_4 = \pm\sqrt{\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}{4}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

θ varia sempre tra $-\pi$ e π

$\frac{\theta}{2}$ varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

Il coseno tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ è sempre positivo $\Rightarrow$ scarto la soluzione negativa

$$\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}{4}}$$

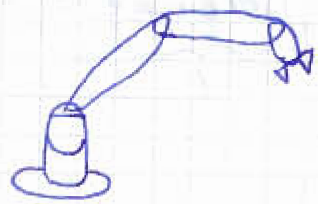
$$r_{21}-r_{12} = 4\varepsilon_3\varepsilon_4 \Longrightarrow \varepsilon_3 = \frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_4}$$

$$r_{13}-r_{31} = 4\varepsilon_2\varepsilon_4 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{r_{13}-r_{31}}{4\varepsilon_4}$$

$$r_{32}-r_{23} = 4\varepsilon_1\varepsilon_4 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{r_{32}-r_{23}}{4\varepsilon_4}$$

Unica singolarità: $E_1 = 0$ cioè $\theta = \pm\pi$. Non vediamo la complessa soluzione particolare.

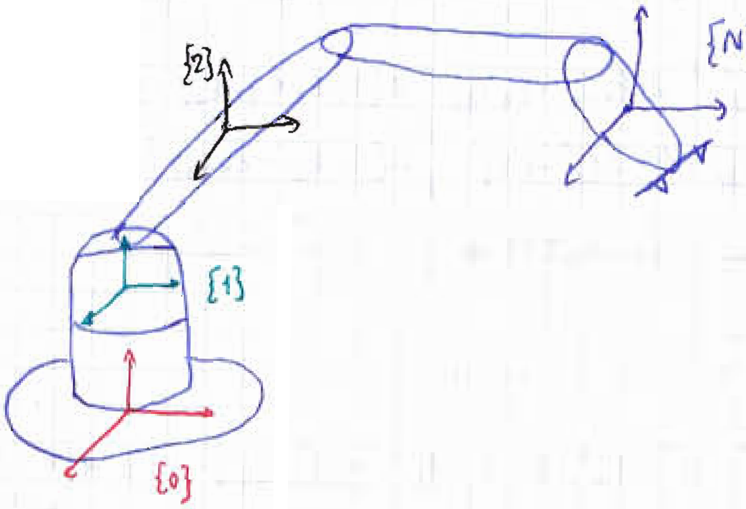
CINEMATICA DIRETTA DEI MANIPOLATORI



$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}$$ POSIZIONE DEI GIUNTI ↓ indiretta

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} p \\ \hline \phi \end{bmatrix}$$ COORDINATE SPAZIO OPERATIVO ↓ diretta

$$\bar{q} \xrightarrow{\text{Cinematica diretta}} \bar{x}$$



${}^0_1T(q_1)$
↑
variabile di giunto

Per ogni giunto posso trovare la matrice di trasformazione omogenea.
Se trovo la matrice generica ${}^0_NT(\bar{q})$ sono a posto.

${}^1_2T(q_2)$

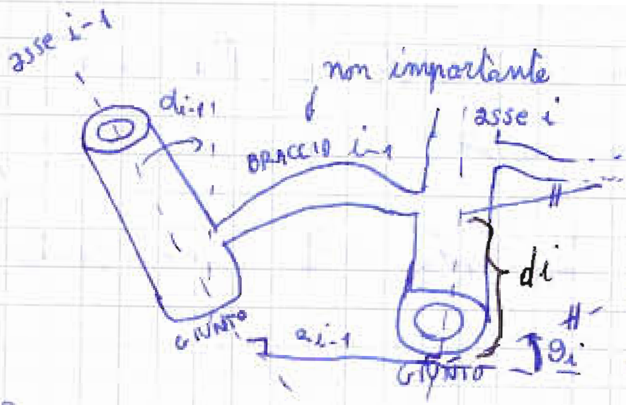
$$ {}^0_NT(\bar{q}) = \left[\begin{array}{c|c} {}^0_NR(\bar{q}) & {}^0p_N(\bar{q}) \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tutto il gioco è trovare questa matrice (dato $\bar{q}$) per poi passare dalla matrice di rotazione alla forma minima.

Uso le regole di composizione.

$$ {}^0_NT(\bar{q}) = {}^0_1T(q_1)\, {}^1_2T(q_2)\, {}^2_3T(q_3) \dots {}^{N-1}_{N}T(q_N)$$

Devo quindi trovare queste matrici



È importante dire come sono messi gli assi tra loro.
Per farlo mi servono due numeri:
- distanza tra gli assi
- angolo tra gli assi

La distanza è perpendicolare a entrambe le rette ed è il segmento di minor lunghezza che unisce le due rette.

a_{i-1} → LUNGHEZZA DI BRACCIO

α_{i-1} → TORSIONE DI BRACCIO

La lunghezza di braccio può essere al di fuori del braccio.

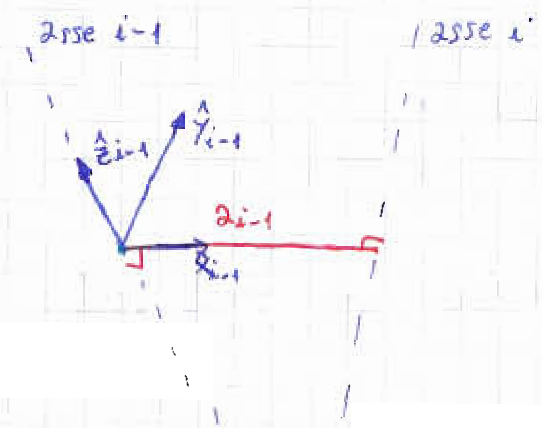
Voglio anche descrivere la relazione tra un braccio e il successivo mediante l'OFFSET DI GIUNTO o SCOSTAMENTO DI GIUNTO d_i e l'ANGOLO DI GIUNTO θ_i.

In totale avrò 4 parametri, due per la geometria del braccio e due per come questo si accoppia con il successivo. I primi due sono COSTANTI, mentre gli altri due cambiano:
- in caso di giunto rotoidale, d_i è costante mentre θ_i varia nel tempo
- in caso di giunto prismatico, d_i varia nel tempo mentre θ_i è costante.

TECNICA X FISSARE LE TERNE

Ci sono vari casi in cui possono essere messi gli assi:

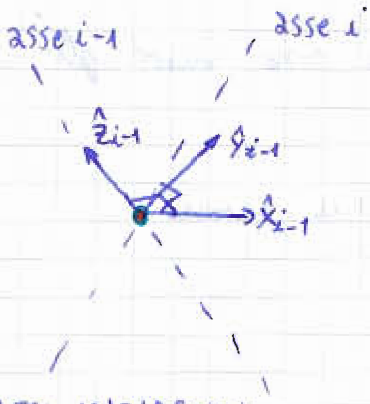
①



ASSI DISTINTI

L'origine la metto nel punto di intersezione tra la distanza e l'asse i-1.
Il versore z va sempre lungo l'asse i-1 nel verso che ci pare.
Il versore x va sempre lungo la distanza

(2)

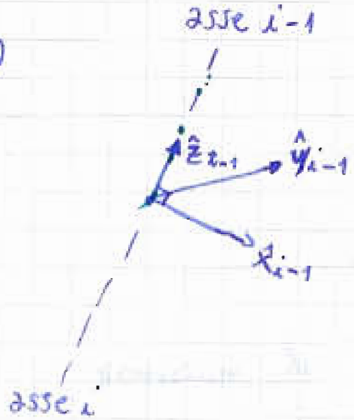


ASSI INCIDENTI

La $\hat{x}$ è ortogonale a entrambi gli assi. Può essere messa a destra o a sinistra.

La $\hat{y}$ la fisso con la regola della mano destra

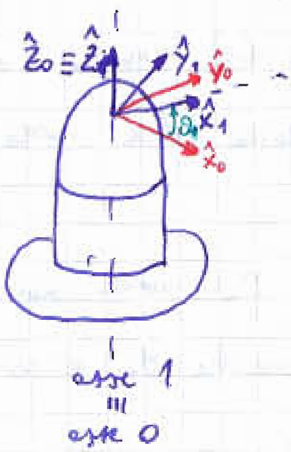
(3)



ASSI COINCIDENTI

19/10/2009

TERNA DI BASE 0



L'asse 0 è un asse virtuale → lo mettiamo dove ci pare. Conviene metterlo coincidente con l'asse 1 così alcuni parametri di braccio si annullano
↳ più semplice.

PARAMETRI CINEMATICI

$\alpha_{i-1} = 0$ lunghezza di braccio

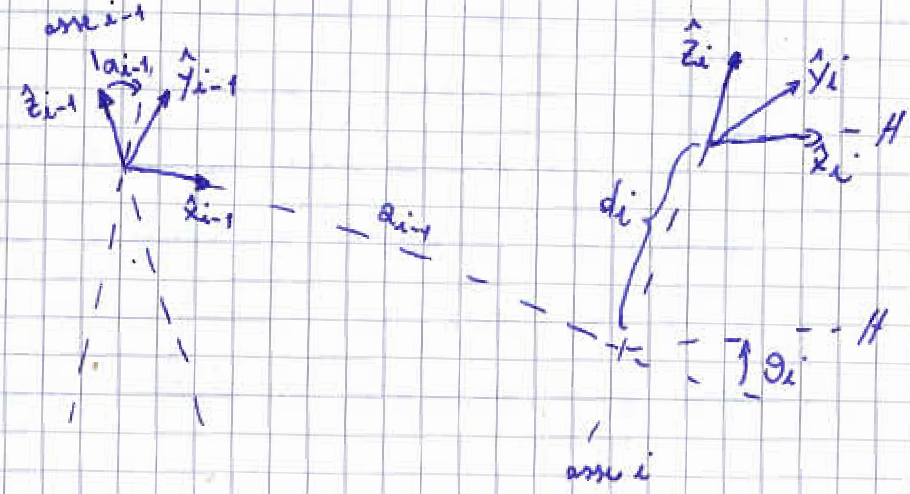
$a_{i-1} = 0$ distanza tra due assi

$d_i = 0$ offset di giunto (distanza delle x)

θ_i

L'origine della terna 0 la faccio coincidere con quella della terna 1.

La terna 0 e la n si lasciano per ultime.
Ho mandato a 0 tre parametri cinematici su quattro.



α_{i-1} = angolo da $\hat{z}_{i-1}$ e $\hat{z}_i$ con il segno di $\hat{x}_{i-1}$

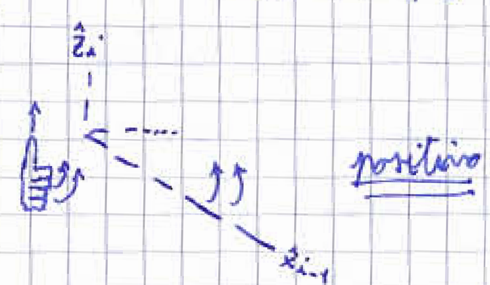
Pollice verso $\hat{x}_{i-1}$, dita che si chiudono nel verso positivo.

a_{i-1} = distanza da $\hat{z}_{i-1}$ a $\hat{z}_i$ con il segno di $\hat{x}_{i-1}$ (sempre positiva per come assegnamo le terne)

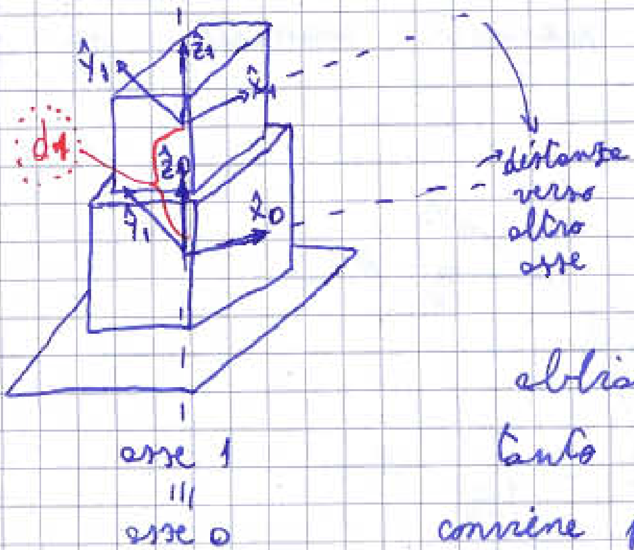
θ_i = angolo da $\hat{x}_{i-1}$ e $\hat{x}_i$ con il segno di $\hat{z}_i$

d_i = distanza da $\hat{x}_{i-1}$ e $\hat{x}_i$ con il segno di $\hat{z}_i$ (positivo in questo caso)

Se suppongo $\hat{x}_{i-1}$ uscente dal foglio e $\hat{x}_i$ più interno:



Nel caso di un GIUNTO PRISMATICO



La terna 0 è ancora un grado di libertà. Siccome le terne sono solidali con il braccio, non ha senso che abbiano l'origine in comune perché tanto i bracci si muoveranno. Mi conviene però assegnare $\hat{x}_0 \parallel \hat{x}_1$ in modo che $\theta_i = 0$

PARAMETRI CINEMATICI

$\alpha_{i-1} = 0$

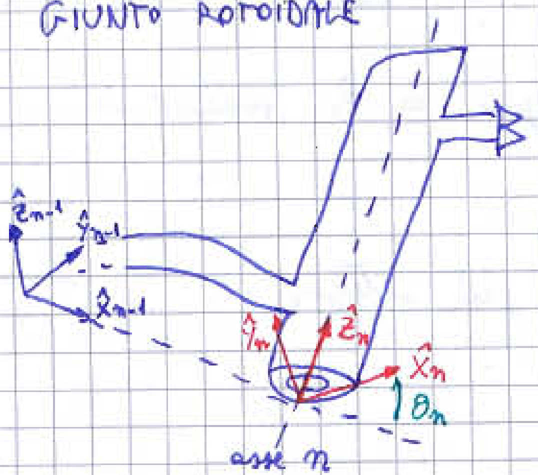
$a_{i-1} = 0$

$d_i = d_1$

$\theta_i = 0$

ASSEGNAZIONE ULTIMA TERNA n

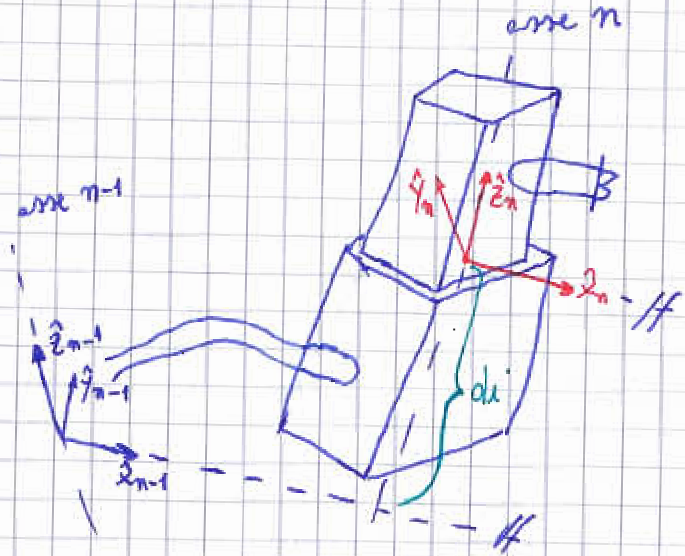
GIUNTO ROTOIDALE



Non c'è un braccio successivo, per cui non c'è una distanza che mi vincola, per cui la posso mettere dove mi pare.
Mi conviene mettere l'origine sulla distanza, $\hat{x}_n$ non allineata (tanto varia nel tempo)

$d_n = 0$ mentre tutti gli altri parametri sono in generale diversi da 0.

GIUNTO PRISMATICO



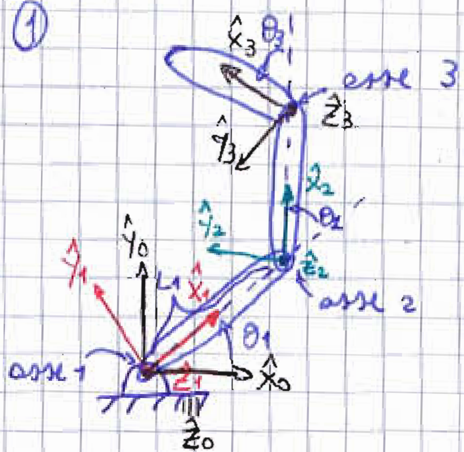
$\hat{x}_n$ la prendo // a $\hat{x}_{n-1}$ così $\theta_i = 0$. La $\hat{y}_n$ non è parallela altrimenti anche $\hat{z}_n$ dovrebbe essere parallela.

Gli altri 3 parametri in generale variano.

- - - - - FINE TEORIA I COMPITINO - - - -

ESERCIZI I COMPITINO

①



1) Fisso gli assi

2) Fisso le distanze. Per fissare la terna 1 devo sapere la distanza tra asse 1 e 2 (rette parallele, distanza dove voglio)

3) Fisso la terna 1
- ↳ origine sull'asse 1 (• uscente × entrante)
- ↳ $\hat{z}$ verso noi (uscente)
- ↳ $\hat{x}$ lungo la distanza
- ↳ $\hat{y}$ con regola mano destra

4) Fisso la terna 2
- ↳ distanza lungo il braccio
- ↳ $\hat{z}$ uscente
- ↳ $\hat{x}$ lungo la distanza
- ↳ $\hat{y}$ regola mano destra

5) Disegno le variabile di giunto

6) Fisso la terna 0

↳ giunto rotoidale

↳ stessa origine di 1

↳ $\hat{z}_0 \equiv \hat{z}_1$

7) Fisso la terna n $(=3)$

↳ come prima

8) Scrivo una tabella con tutti i parametri cinematici

↳ n° righe = n° bracci

↳ n° colonne = 4 (n° parametri)

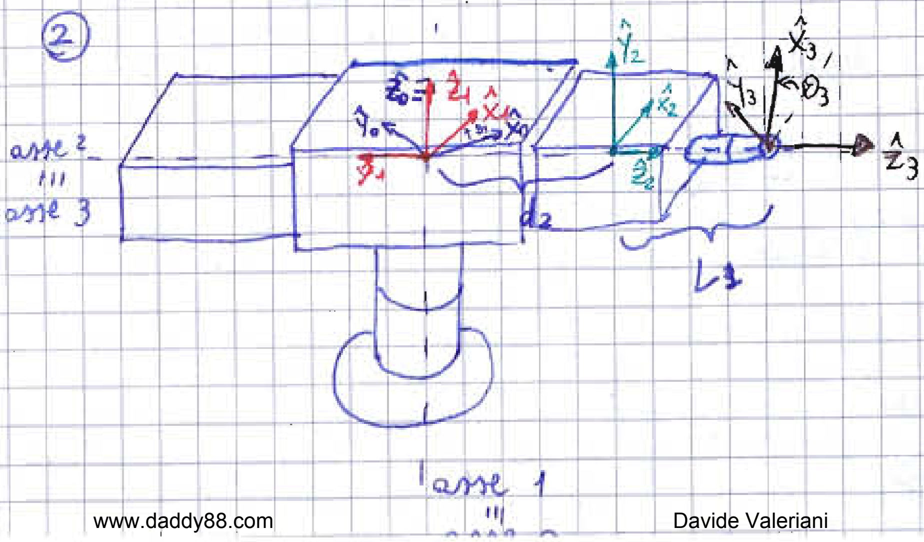
	α_{i-1}	a_{i-1}	ϑ_i	d_i
1	0	0	ϑ_1	0
2	0*	L_1	ϑ_2	0×
3	0	L_2	ϑ_3	0

* angolo tra $\hat{z}_1$ e $\hat{z}_2 = 0$

× complanari: lungo la z non c'è nessuna distanza tra i versori

Stare attenti ai segni delle costanti (da indicare nella tabella).
Le variabili di giunto invece si indicano senza segno

2



asse 2 → asse di traslazione

asse 3 → asse di rotazione

TERNA 1

Considero gli assi 1 e 2. Si intersecano → l'origine va nel punto di intersezione. $\hat{z}_1$ va sull'asse 1. $\hat{x}_1$ va o entrante o uscente (a piacimento). $\hat{y}_1$ va per forza sull'asse 2 perchè deve essere $\perp$ a $\hat{x}_1$ e $\hat{z}_1$

TERNA 2

Considero gli assi 2 e 3. Sono coincidenti tra loro per cui l'origine la posso mettere dove voglio (non ha senso sull'incrocio perchè tanto si sposta). $\hat{z}_2$ va sull'asse 2; $\hat{x}_2$ lo metto parallelo a $\hat{x}_1$ per semplificare; $\hat{y}_2$ verso l'alto

TERNA 3

L'origine scelgo di metterla sull'organo utensile. $\hat{x}_3$ la metto non // a $\hat{x}_2$ tanto il giunto ruota.

TERNA 0

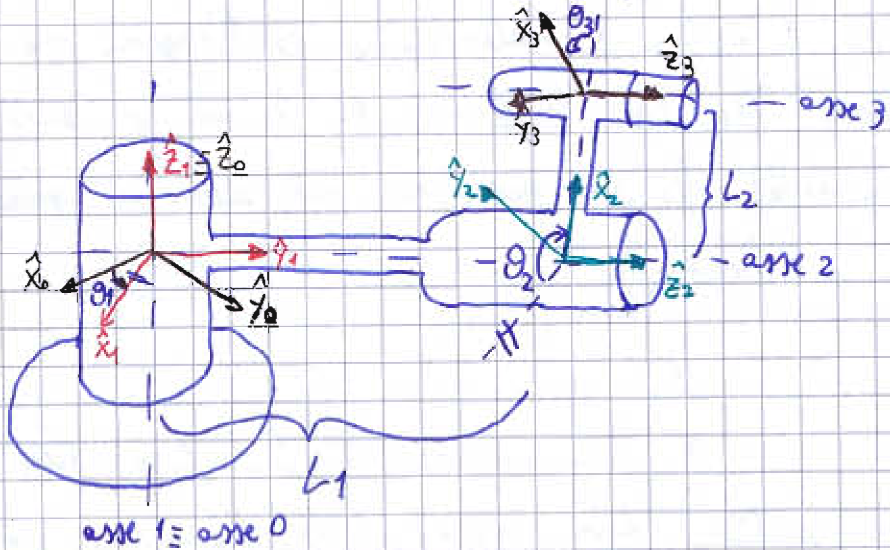
Giunto rotoidale, origine come la terna 1

	α_{i-1}	a_{i-1}	ϑ_i	d_i
1	0	0	ϑ_1	0
2	$+\pi/2$ tra $\hat{z}_1$ e $\hat{z}_2$	0	0	d_2
3	0	0	ϑ_3	$+L_1$

se i prolungamenti dei versori si incontrano, $a_{i-1} = 0$

Se l'origine della terna 2, essendo un grado di libertà, l'avessi messa coincidente con l'origine della terna 3, avrei semplificato ulteriormente la tabella ($L_1 = 0$)

(3)

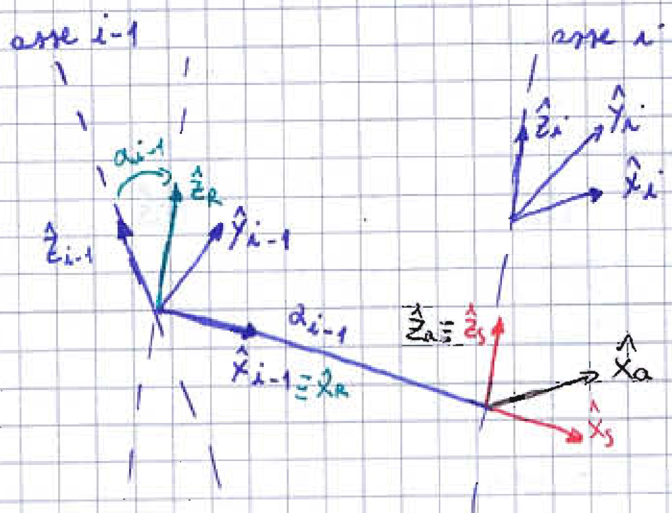


	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	θ_2	$+L_1$
3	0	L_2	θ_3	0

parallele $\hat{z}_2$ e $\hat{z}_3$

perché non segue il verso delle dita

CINEMATICA DIRETTA



Ruoto attorno a x la terna i-1 fino ad allinearla al nuovo asse. Ottengo la terna R

Traslo la terna R per ottenere la terna S

Ruoto di ϑ la terna S e ottengo la terna Q

Traslo la terna Q per farla allineare alla terna i

$$ {}^{i-1}_{R}T = T_x(\alpha_{i-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} & R_x(\alpha_{i-1}) & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{R}_{S}T = T_x(a_{i-1}) = \left[\begin{array}{ccc|c} & I_3 & & \begin{matrix}a_{i-1}\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$ ← traslazione lungo solo l'asse x

$$ {}^{S}_{Q}T = T_z(\vartheta_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} & R_z(\vartheta_i) & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{Q}_{i}T = T_z(d_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} & I_3 & & \begin{matrix}0\\0\\d_i\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R}T \cdot {}^{R}_{S}T \cdot {}^{S}_{Q}T \cdot {}^{Q}_{i}T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\vartheta_i c\alpha_{i-1} & c\vartheta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\vartheta_i s\alpha_{i-1} & c\vartheta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Con la 1ª riga della tabella salta fuori ${}^{0}_{1}T$

Con la nª riga della tabella ottengo ${}^{n-1}_{n}T$

$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \cdots {}^{n-1}_{n}T $$

Applico la matrice all'esercizio ②

$$ {}^0_1T = \left[\begin{array}{ccc|c} c\vartheta_1 & -s\vartheta_1 & 0 & 0 \\ s\vartheta_1 & c\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

in effetti non ho nessuna traslazione

$$ {}^1_2T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$s\vartheta_1 = S_1$

$c\vartheta_1 = C_1$

$$ {}^2_3T = \left[\begin{array}{ccc|c} c\vartheta_3 & -s\vartheta_3 & 0 & 0 \\ s\vartheta_3 & c\vartheta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^0_3T = {}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T = \left[\begin{array}{ccc|c} C_1C_3 & -C_1S_3 & S_1 & (L_1+d_2)S_1 \\ S_1C_3 & -S_1S_3 & -C_1 & -(L_1+d_2)C_1 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \bar{x} = \begin{bmatrix} P \\ \hline \phi \end{bmatrix} \qquad P \equiv \begin{bmatrix} (L_1+d_2)S_1 \\ -(L_1+d_2)C_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

ϕ ? devo ricavarla

Mi si dice che uso la forma minima $R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)$...

$$ R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = \left[\begin{array}{c|c|c} c\alpha\, c\beta & c\alpha\, s\beta\, s\gamma - s\alpha\, c\gamma & c\alpha\, s\beta\, c\gamma + s\alpha\, s\gamma \\ s\alpha\, c\beta & s\alpha\, c\beta\, s\gamma + c\alpha\, c\gamma & s\alpha\, s\beta\, c\gamma - c\alpha\, s\gamma \\ -s\beta & c\beta\, s\gamma & c\beta\, c\gamma \end{array}\right] $$

Confronto le matrici: prima gli elementi costanti.

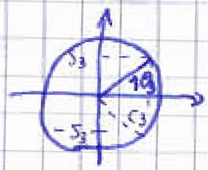
$$\begin{cases} C\beta\, C\gamma = 0 \\ C\beta\, S\gamma = C_3 \end{cases} \Rightarrow C\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \pm \pi/2$$

1) $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

$$R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & C\alpha S\beta & S\alpha \\ S\alpha C\beta & S\alpha C\beta & -C\alpha \\ -S\beta & C\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S\vartheta_3 &= -S\beta \\ C\vartheta_3 &= C\beta \end{aligned} \Rightarrow \beta = -\vartheta_3$$

perché



$$\begin{aligned} S\vartheta_1 &= S\alpha \\ -C\vartheta_1 &= -C\alpha \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \vartheta_1$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ -\vartheta_3 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

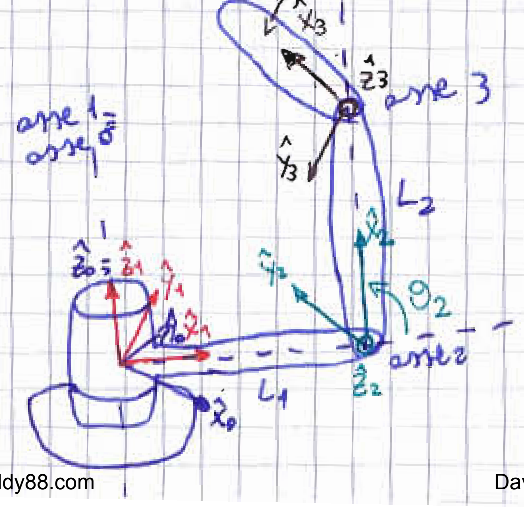
2) $\gamma = -\dfrac{\pi}{2}$

$$R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = \left[\begin{array}{c|c|c} C\alpha C\beta & -C\alpha S\beta & -S\alpha \\ S\alpha C\beta & -S\alpha C\beta & C\alpha \\ -S\beta & -C\beta & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} S\vartheta_3 &= -S\beta \\ C\vartheta_3 &= -C\beta \end{aligned} \Rightarrow \vartheta_3 = \beta + \pi$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \alpha + \pi \\ \beta + \pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S\vartheta_1 &= -S\alpha \\ +C\vartheta_1 &= -C\alpha \end{aligned} \Rightarrow \vartheta_1 = \alpha + \pi$$



	α_{i-1}	a_{i-1}	ϑ_i	d_i
1	0	0	ϑ_1	0
2	$+\pi/2$	L_1	ϑ_2	0
3	0	L_2	ϑ_3	0

$$ {}^0_1T = \left[\begin{array}{ccc|c} c\vartheta_1 & -s\vartheta_1 & 0 & 0 \\ s\vartheta_1 & c\vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^1_2T = \left[\begin{array}{ccc|c} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

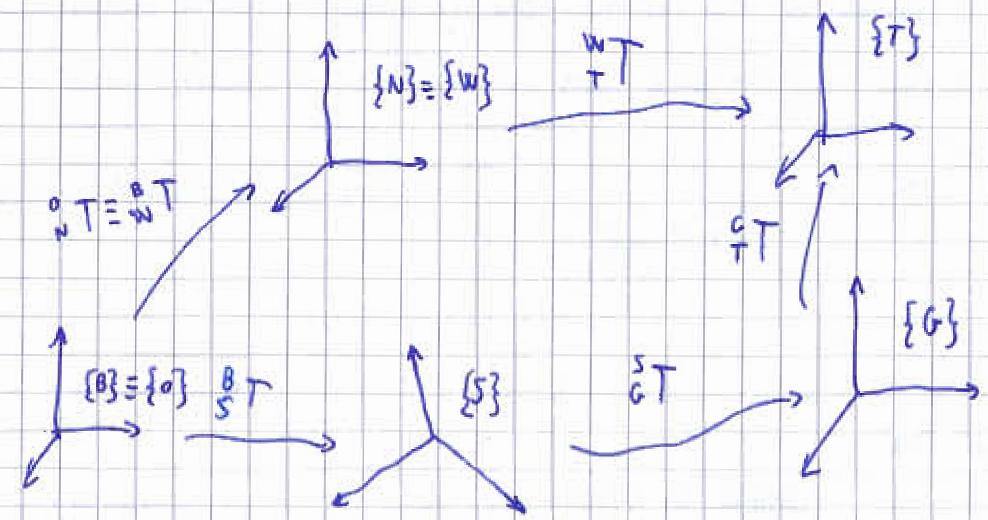
$$ {}^2_3T = \left[\begin{array}{ccc|c} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^0_3T = \left[\begin{array}{ccc|c} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

CINEMATICA INVERSA

21/10/09

Data la posizione e l'orientamento dell'ultima terna, trovare i parametri cinematici.



L'unica incognita è ${}^{0}_{N}T \equiv {}^{B}_{W}T$

$$
{}^{0}_{N}T = \underbrace{{}^{B}_{S}T \cdot {}^{S}_{G}T \, {}^{G}_{T}T \, ({}^{W}_{T}T)^{-1}}_{\text{parto dalla coda}} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & 0 & 1 \end{array}\right] \equiv {}^{0}_{N}T(\bar{q})
$$

Devo trovare i valori di $\bar{q}$ (variabili di giunto) uguagliando la matrice vista per $T(\bar{q})$ con la precedente.

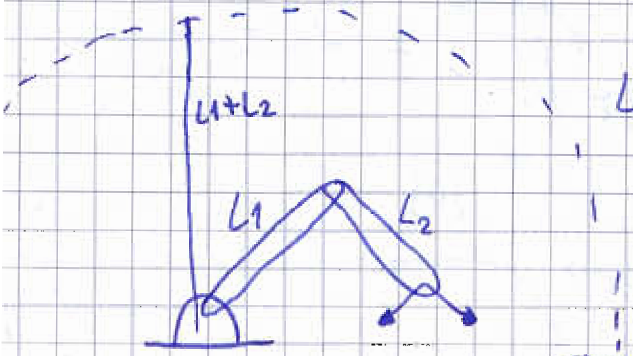
Per un manipolatore industriale a 6 giunti avrò almeno 6 equazioni ma meno di 12 (per la ridondanza di alcuni valori della matrice di rotazione).

Stiamo trattando un sistema non lineare $\Rightarrow$ può non esserci soluzione!

SPAZIO DI LAVORO $\rightarrow$ volume individuato dall'origine della terna utensile quando ai giunti si fanno descrivere tutti i moti possibili

SPAZIO DI LAVORO RAGGIUNGIBILE → insieme dei punti che l'origine della terna utensile può raggiungere con almeno un orientamento.

SPAZIO DI LAVORO DI DESTREZZA → insieme dei punti che l'origine della terna utensile può raggiungere con qualsiasi orientamento.

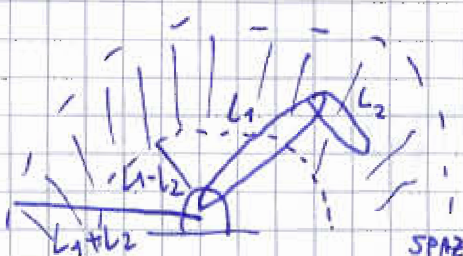


$L_1 = L_2$

SPAZIO DI DESTREZZA → origine

SPAZIO DI LAVORO RAGGIUNGIBILE

$L_2 < L_1$



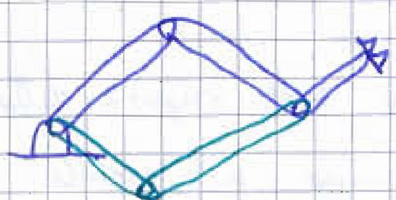
SPAZIO DI DESTREZZA = $\emptyset$

SPAZIO DI LAVORO RAGGIUNGIBILE Corona circolare

1° PROBLEMA → quando si ha soluzione?

La soluzione non esiste se il punto assegnato non appartiene allo spazio di lavoro raggiungibile.

Le definizioni date in precedenza possono essere date considerando la terna di polso.

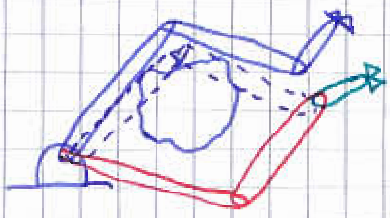


L'organo utensile può raggiungere il punto in entrambi i casi ⇒ due soluzioni

SOLUZIONE MULTIPLA

Più soluzioni ci sono e più è vantaggioso per chi lo utilizza, ma dobbiamo trovarle tutte!

Questo perché permette, ad esempio, di aggirare gli ostacoli:



Un robot antropomorfo (sei giunti: busto che ruota, braccio che si alza, avambraccio che si alza, polso che si alza, si sposta e ruota) ha in generale 8 soluzioni. Robot più usati.

METODI SOLUTIVI

1) Metodi numerici (per tentativi)

2) Metodi di soluzioni in forma chiusa (analitica, equazione che risolve il problema)

Tutti i manipolatori con giunti prismatici o rotoidali aventi 6 gradi di libertà sono risolubili.

Condizione sufficiente affinché un manipolatore con 6 giunti rotoidali abbia una soluzione in forma chiusa è che 3 assi di giunto contigui si intersechino in un punto o siano paralleli.

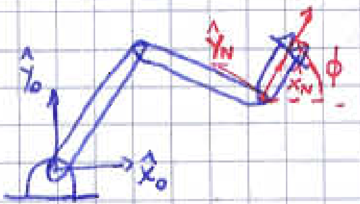
PRIMA PROVA INTERMEDIA: MARTEDÌ 3 NOVEMBRE
SECONDA PROVA INTERMEDIA: MARTEDÌ 1 DICEMBRE

${}^{0}_{N}T(\bar{x}) \rightarrow$ altro modo per il problema di cinematica inversa:

$${}^{0}_{N}T(\bar{x}) \overset{\text{uguaglio}}{\underset{\text{termine a termine}}{=}} {}^{0}_{N}T(\bar{q}) \Longrightarrow \text{salta fuori } \bar{q}(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \hline \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{io voglio} \quad \begin{matrix} q_1 = f(\bar{x}) \\ q_2 = f(\bar{x}) \\ \vdots \end{matrix}$$

Altro modo di assegnare il problema è usando uno spazio ridotto:

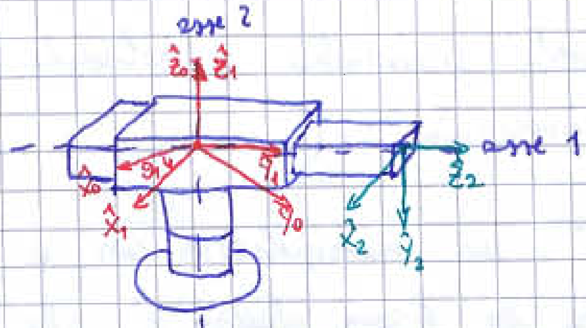


$$\bar{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \hline \phi \end{bmatrix}$$

SPAZIO OPERATIVO RIDOTTO → niente z perchè sarebbe sempre 0.
Due angoli sono costanti, uno ϕ per descrivere l'orientamento

$$^{0}_{N}T(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc|c} c\phi & -s\phi & 0 & X \\ s\phi & c\phi & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

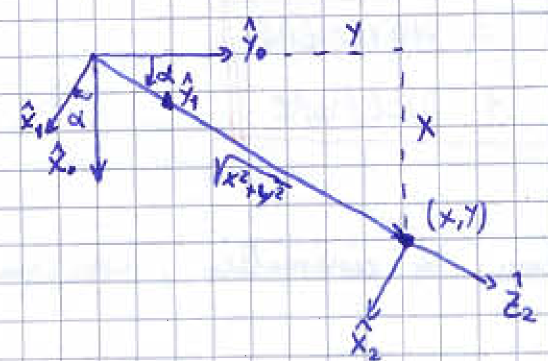
Esempio



$\hat{x}_2 // \hat{x}_1$

La posizione può essere descritta da $\bar{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

Vediamo le terne dall'alto:



Una volta assegnato il punto (x,y), la terna utensile può essere orientata in un solo modo.

$$ {}^0_N T(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc|c} & f(x,y) & & x \\ & & & y \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = $$

da togliere dopo

Voglio descrivere ${}^0_2R = {}^0_1R \, {}^1_2R = R_z(\alpha) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$

$$ = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & -s\alpha \\ s\alpha & 0 & c\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

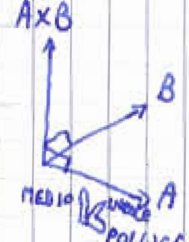
So che $|c\alpha| = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad |s\alpha| = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in valore assoluto

Ora però devo considerare i segni. Ho studiato la cosa considerando $x > 0$ e $y > 0$, quindi $c\alpha$ e $s\alpha$ sono positivi. Ma $\alpha < 0$, quindi $c\alpha > 0$ e $s\alpha < 0$.

$$ \Rightarrow \quad c\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad s\alpha = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} $$

$$ {}^0_N T(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

PRODOTTO VETTORIALE



Il prodotto vettoriale $A \times B$ è un vettore che ha

$\|A \times B\| = |A| \cdot |B| \cdot \text{sen}\,\alpha$

ed è ortogonale a entrambi i vettori di partenza

$$A = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \qquad A \times B = \det \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{z}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

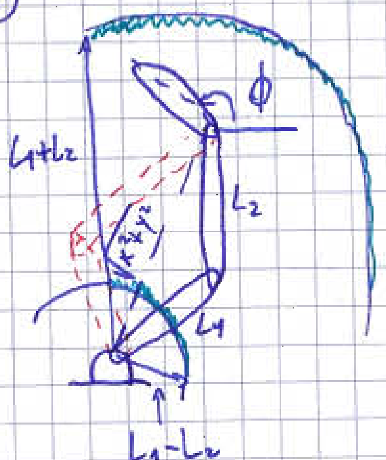
Non è commutativo!!

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \end{aligned}}$$

26/10/09

METODI RISOLUTIVI CINEMATICA INVERSA

1



	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	L_1	θ_2	0
3	0	L_2	θ_3	0

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_1C_2 & 0 & L_1C_1 \\ S_1C_2 + C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 & 0 & L_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

semplifico $C_{12} = C(\theta_1 + \theta_2)$

$$ = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & L_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & L_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

poi ${}^{0}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T$

$$ {}^{0}_{3}T = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{123} & -S_{123} & 0 & L_1C_1 + L_2C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & L_1S_1 + L_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Data questa matrice risolviamo il problema di cinematica inversa.

So che $T(\bar{x}) = \left[\begin{array}{ccc|c} C\phi & -S\phi & 0 & X \\ S\phi & C\phi & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Confronto le due matrici: le costanti devono corrispondere altrimenti una delle due matrici e' sbagliata.

Ricavo tutte le equazioni che servono.

$C\phi = C_{123}$

$S\phi = S_{123}$

$x = L_1 C_1 + L_2 C_{12}$

$y = L_1 S_1 + L_2 S_{12}$

SOLUZIONE ①: valida per i manipolatori con giunti rotoidali con assi //:

• elevo al quadrato e sommo x e y

$$x^2+y^2 = L_1^2 C_1^2 + L_2^2 C_{12}^2 + 2L_1L_2 C_{12}C_1 + L_1^2 S_1^2 + L_2^2 S_{12}^2 + 2L_1L_2 S_{12}S_1 =$$

$$= L_1^2 \underbrace{(C_1^2+S_1^2)}_{1} + L_2^2 \underbrace{(C_{12}^2+S_{12}^2)}_{1} + 2L_1L_2 \underbrace{(C_{12}C_1 + S_{12}S_1)}_{\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_1)=\cos\theta_2} =$$

$$= L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 C_2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x^2+y^2-L_1^2-L_2^2}{2L_1L_2}$$

ho trovato $\cos\theta_2$ in funzione delle variabili dello spazio operativo

Tuttavia, non posso usare Atan2 perché non riesco a ricavare S_2.

$$\theta_2 = \pm\arccos\left(\frac{x^2+y^2-L_1^2-L_2^2}{2L_1L_2}\right)$$

doppia soluzione !!!

Devo però imporre che $\left|\frac{x^2+y^2-L_1^2-L_2^2}{2L_1L_2}\right| \leq 1$ perché il coseno è compreso tra -1 e 1.

$$|x^2+y^2-L_1^2-L_2^2| \leq 2L_1L_2$$

$$-2L_1L_2 \leq x^2+y^2-L_1^2-L_2^2 \leq 2L_1L_2$$

$$-2L_1L_2+L_1^2+L_2^2 \leq x^2+y^2 \leq 2L_1L_2+L_1^2+L_2^2$$

$$(L_1-L_2)^2 \leq x^2+y^2 \leq (L_1+L_2)^2$$

Quindi il punto deve appartenere allo spazio di lavoro.

(x,y) deve $\in$ allo spazio operativo.
assegnato

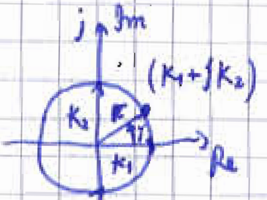
Espando le equazioni di x e y.

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 - L_2 s_1 s_2$$
$$y = L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2 + L_2 c_1 s_2$$

$$x = \overbrace{(L_1 + L_2 c_2)}^{K_1} c_1 - \overbrace{L_2 s_1 s_2}^{K_2} = K_1 c_1 - K_2 s_1$$
$$y = \underbrace{L_2 s_2}_{K_2} c_1 + s_1 \underbrace{(L_1 + L_2 c_2)}_{K_1} = K_2 c_1 + K_1 s_1$$

ora devo trovare s_1 e c_1 perché K_1 e K_2 sono note

Vedo K_1 e K_2 come parte reale e parte immaginaria di un numero complesso:



$$r = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \qquad K_1 = r\cos\gamma$$
$$\gamma = \mathrm{Atan2}(K_2, K_1) \qquad K_2 = r\sin\gamma$$

$$x = \overbrace{r c_\gamma}^{K_1} c_1 - \overbrace{r s_\gamma}^{K_2} s_1 \qquad \frac{x}{r} = c_\gamma c_1 - s_\gamma s_1 = \cos(\gamma + \vartheta_1)$$
$$y = r s_\gamma c_1 + r c_\gamma s_1 \qquad \frac{y}{r} = s_\gamma c_1 + c_\gamma s_1 = \sin(\gamma + \vartheta_1)$$

$$\gamma + \vartheta_1 = \mathrm{Atan2}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \mathrm{Atan2}(y, x)$$
proprietà scalatura

$$\boxed{\vartheta_1 = \mathrm{Atan2}(y,x) - \gamma = \mathrm{Atan2}(y,x) - \mathrm{Atan2}(K_2, K_1)}$$

$$\begin{cases} c\phi = c_{123} \\ s\phi = s_{123} \end{cases} \Rightarrow \phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \Rightarrow \vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

dato appena calcolati

Questa formula non funziona quando:

$y = x = 0$

$K_1 = K_2 = 0$

$r = 0$

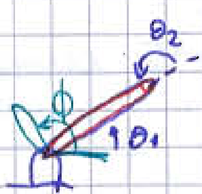
In realtà è un caso solo:

se $K_1 = K_2 = 0$, $r = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = 0$ e $K_1^2 + K_2^2 = (l_1 + l_2 C_2)^2 + (l_2 S_2)^2 =$

$= l_1^2 + l_2^2 C_2^2 + 2 l_1 l_2 C_2 + l_2^2 S_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 C_2 \underset{\text{visto prima}}{=} x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow$ la singolarità non si verifica

$l_1 = l_2 \Rightarrow$



$\vartheta_2 = 180° = \pi$

ϑ_1 qualsiasi

$\vartheta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$ come prima

∞ soluzioni

② Metodo risolutivo

Se dopo un po' di calcoli mi viene una equazione del genere

$a \cos\vartheta + b \sin\vartheta = c$

Trasformo l'equazione in un'equazione polinomiale

$u(\theta) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$\vartheta \longrightarrow u = tg\,\frac{\vartheta}{2}$

$\vartheta = 2\,arctg\,u$

Dimostrazione

$\cos\theta = \cos(2\,arctg\,u)$

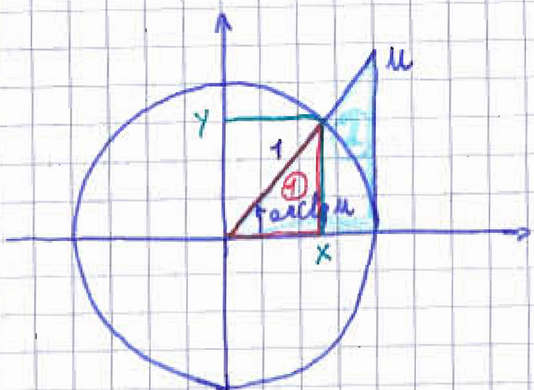
$\sin\theta = \sin(2\,arctg\,u)$

formule duplicazione angoli

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}}$$

$$\cos\theta = \cos^2(\operatorname{arctg} u) - \sin^2(\operatorname{arctg} u)$$

$$\sin\theta = 2\sin(\operatorname{arctg} u)\cos(\operatorname{arctg} u)$$



$x = \cos(\operatorname{arctg} u)$

$y = \sin(\operatorname{arctg} u)$

simile

$$\frac{x}{1} \underset{\text{ipotenusa}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

circonferenza raggio unitario

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}}$$

$$\cos\theta = x^2 - y^2 = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\sin\theta = 2xy = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$a \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} + b\,\frac{2u}{1+u^2} = c \qquad a - au^2 + 2bu = c + cu^2$$

$(c+a)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$ $\quad$ a, b, c sono noti.

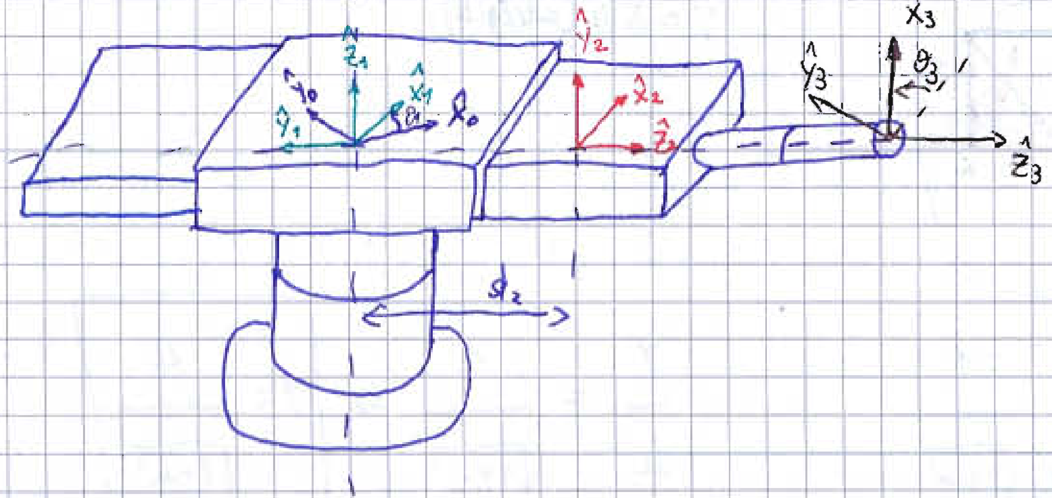
$$u_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-(c^2-a^2)}}{c+a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2+a^2-c^2}}{c+a}$$ ricavo la u.

$$\boxed{\theta = 2\arctg u = 2\arctg \frac{b \pm \sqrt{b^2+a^2-c^2}}{c+a}}$$ doppia soluzione

ESERCIZI CINEMATICA INVERSA

28/10/09

①



$$ {}^0_3T(\theta_1, d_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} C_1C_3 & -C_1S_3 & S_1 & (L+d_2)S_1 \\ S_1C_3 & -S_1S_3 & -C_1 & -(L+d_2)C_1 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Date $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \hline \phi \end{bmatrix}$ posso sapere tutto. Non uso z perché robot planare

ϕ è l'angolo tra $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_3$ misurato rispetto a $\hat{z}_3$

$$ {}^0_3R = R_z(\alpha) \cdot R_x(\pi/2)\, R_z(\phi) = $$

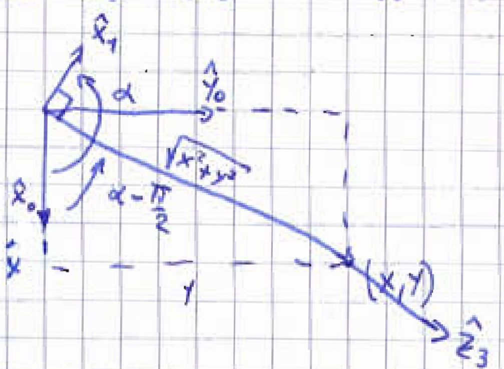
come θ_1 ma θ_1 solo x spazio giunti

rotazione rispetto a x di $+\frac{\pi}{2}$

$$=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{c\frac{\pi}{2}}_{0} & \underbrace{-s\frac{\pi}{2}}_{-1} \\ 0 & \underbrace{s\frac{\pi}{2}}_{1} & \underbrace{c\frac{\pi}{2}}_{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha \\ s\alpha & 0 & -c\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} c\alpha c\phi & -c\alpha s\phi & s\alpha \\ s\alpha c\phi & -s\alpha s\phi & -c\alpha \\ s\phi & c\phi & 0 \end{array}\right]$$

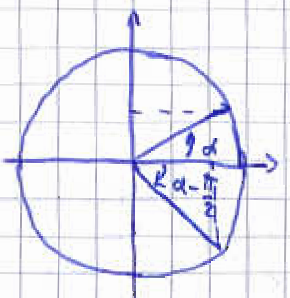
$\alpha \notin$ spazio operativo definito e quindi la devo togliere.
Guardo il robot dall'alto.



Ho messo il robot in una posizione diversa e quindi cambia α ma non il risultato. Messo a piacimento.

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\cos$ e $\sin > 0$ perché $\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$



$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$

$${}^0_3T(x,y,\phi) = \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot c\phi & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, s\phi & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot c\phi & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, s\phi & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Confronto ${}^0_3T(x,y,\phi)$ con ${}^0_3T(\theta_1, d_2, \theta_3)$ e ricavo θ_1, d_2, θ_3 in funzione di x, y, ϕ

$$\begin{cases} S_3 = S\phi \\ C_3 = C\phi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta_3 = \phi}$$

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ C_1 = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta_1 = Atan2\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \overset{\text{solo perché } \sqrt{\ } > 0}{=} Atan2(x, -y)}$$

Casi singolari? $x = y = 0$ punto ad di fuori dello spazio operativo (altrimenti sarebbe θ_1 qualsiasi). Non c'è singolarità.

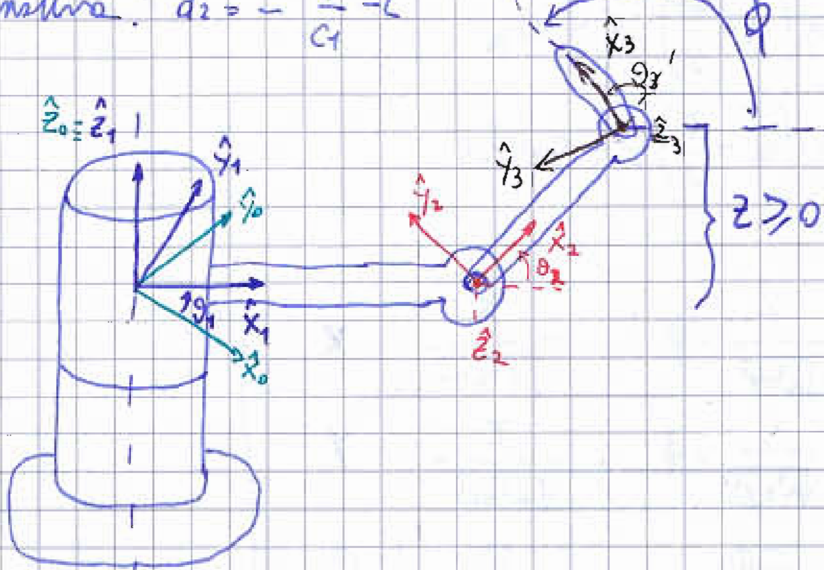
$$\begin{cases} x = S_1(L+d_2) \\ y = -C_1(L+d_2) \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(L+d_2) \Rightarrow \boxed{d_2 = \sqrt{x^2+y^2} - L}$$

ottima soluzione, non dà luogo a singolarità

Se avessi fatto: $\dfrac{x}{S_1} = L + d_2 \Rightarrow d_2 = \dfrac{x}{S_1} - L$ θ_1 qualsiasi e S_1 può essere uguale a 0.

Dovrei tenere conto dei casi particolari e dare una rappresentazione alternativa: $d_2 = -\dfrac{y}{C_1} - L$

②



così il braccio non va sotto

$$
{}^{0}_{3}T(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(L_1+L_2C_2) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(L_1+L_2C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_2 S_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna di base

Non mi viene data la forma minima ma una matrice

$$
{}^{0}_{3}T = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y \\ r_{31} & r_{32} & 0 & Z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

Risolvo la cinematica inversa.

non possono essere entrambi 0.
↳ se sì, errore operatore

$$
\begin{array}{l} S1 = r_{13} \\ C_1 = -r_{23} \end{array} \Rightarrow \vartheta_1 = Atan2(S_1, C_1) = Atan2(r_{13}, -r_{23})
$$

$$
X = C_1(L_1 + L_2C_2) \Rightarrow \left(\frac{X}{C_1} - L_1\right)\cdot\frac{1}{L_2} = C_2
$$

$$
Z = L_2S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{Z}{L_2}
$$

$$
\Rightarrow \vartheta_2 = Atan2\left(\frac{Z}{L_2}, \left(\frac{X}{C_1} - L_1\right)\cdot\frac{1}{L_2}\right)
$$

Questa soluzione però presenta soluzioni singolari ($C_1 = 0$) da calcolare...

Oppure provo a moltiplicare la prima equazione per C_1

$$X \cdot C_1 = C_1^2(L_1 + L_2C_2)$$

e la seconda equazione ($Y = \dots$) per S_1

$$Y \cdot S_1 = S_1^2(L_1 + L_2C_2)$$

poi sommo

$$
X\cdot C_1 + Y\cdot S_1 = \underbrace{(S_1^2 + C_1^2)}_{1}(L_1 + L_2C_2) \Rightarrow C_2 = \frac{X\cdot C_1 + Y\cdot S_1 - L_1}{L_2}
$$

ok

L_2 → sempre > 0

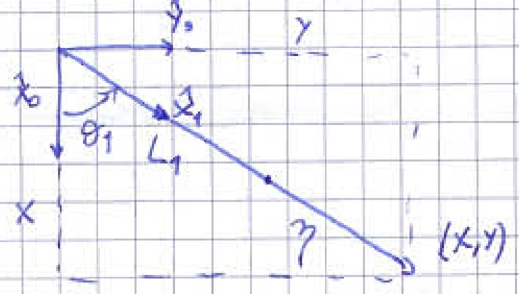
Nessuna singolarità

$$S_2 = \frac{Z}{L_2}$$ come prima

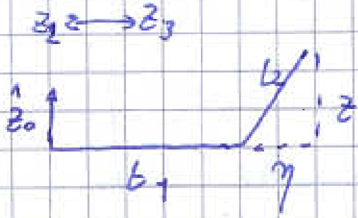
scelta di c_2

$$\boxed{\vartheta_2 = Atan2(s_2, c_2) = Atan2(z, xc_1 + ys_1 - L_1)}$$

Verifico se c'è una singolarità qui. Guardo il manipolatore dall'alto



$\eta \rightarrow$ proiezione primo braccio a terra



$L_1 + \eta = h$

$h = \frac{x}{c_1} \Rightarrow x = h \cdot c_1$

$h = \frac{y}{s_1} \Rightarrow y = h \cdot s_1$

$xc_1 + ys_1 - L_1 = hc_1^2 + hs_1^2 - L_1 = h - L_1 = \eta$

ma $h > L$ a meno che il braccio non sia verticale, ma in quel caso $z \neq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ non si può mai verificare.

$s_{23} = r_{31}$

$c_{23} = r_{32}$

$\Rightarrow \vartheta_2 + \vartheta_3 = Atan2(s_{23}, c_{23}) = Atan2(r_{31}, r_{32})$

$$\boxed{\vartheta_3 = Atan2(r_{31}, r_{32}) - \vartheta_2}$$

Nessuna singolarità neanche in questo caso.

Risolvo ora il problema nel modo precedente, ovvero avendo assegnato il punto nello spazio operativo.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \hline \phi \end{bmatrix}$ la z non viene data perché la posso ricavare.

$\downarrow$

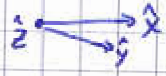
angolo tra $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_3$ su $\hat{z}_3$

$$ {}^0_3R = R_z(\alpha) \cdot R_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot R_z(\phi) $$

come θ1 dove andar via

allineo la z con la $\hat{z}_2$

allineo alla terna 3 ruotando attorno all'asse z



La matrice finale è

$$ {}^0_3R = \begin{bmatrix} c\alpha\, c\phi & -c\alpha\, s\phi & s\alpha \\ s\alpha\, c\phi & -s\alpha\, s\phi & -c\alpha \\ s\phi & c\phi & 0 \end{bmatrix} $$

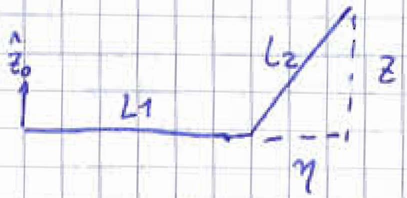
$$ c\alpha = \frac{x}{h} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} $$

$$ s\alpha = \frac{y}{h} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} $$

segni: $\alpha < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $c\alpha$ e $s\alpha > 0$

OK

Trovo z



$$ L_1 + \eta = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \eta = \sqrt{x^2+y^2} - L_1 $$

$$ z = \sqrt{L_2^2 - \eta^2} = \sqrt{L_2^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - L_1\right)^2} = z(x,y) $$

$$ {}^0_3T(x,y,\phi) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} c\phi & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} s\phi & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} c\phi & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} s\phi & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ s\phi & c\phi & 0 & z(x,y) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ s_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad c_1 = +\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \boxed{\theta_1 \overset{\text{solo}}{=} Atan2(+y, +x)} $$

$\theta_2 = Atan2(\ldots)$ come prima

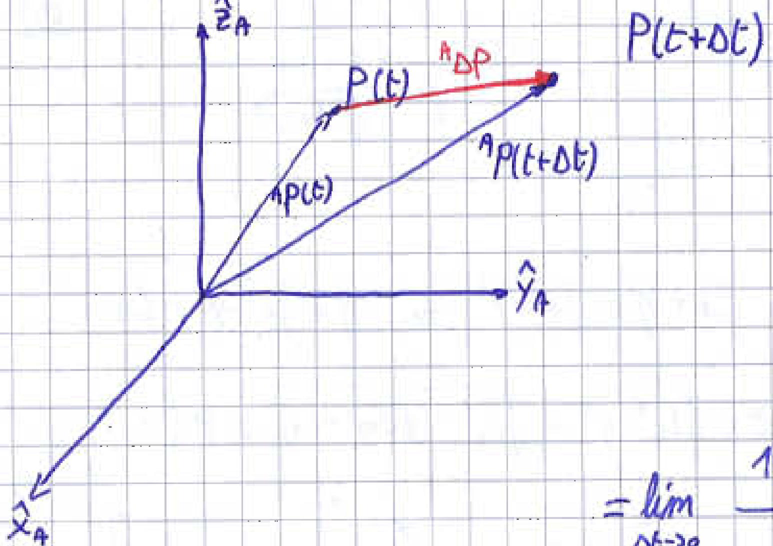
$$S_{23} = S\phi \qquad C_{23} = C\phi \Rightarrow \phi = \vartheta_2 + \vartheta_3 \Rightarrow \boxed{\vartheta_3 = \phi - \vartheta_2}$$

2/11/09

CINEMATICA DIFFERENZIALE

Consideriamo le velocità dei giunti:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$



$${}^A\Delta P = {}^AP(t+\Delta t) - {}^AP(t)$$

$$v_{P_A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^A\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^AP(t+\Delta t) - {}^AP(t)}{\Delta t} =$$

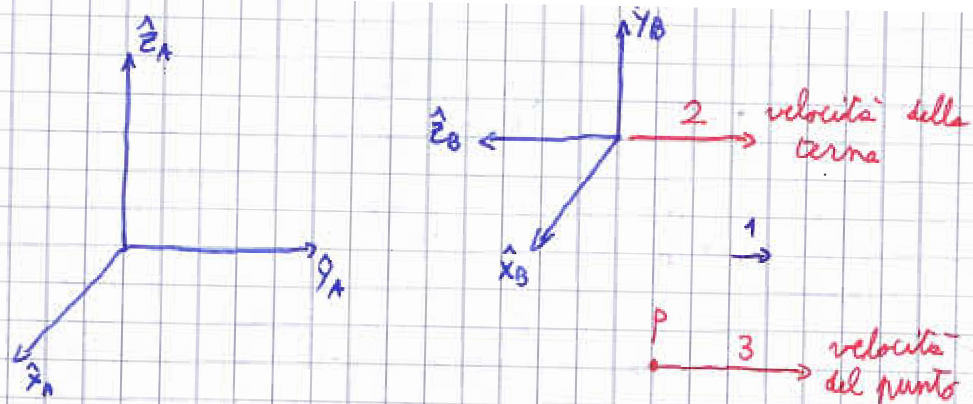
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{bmatrix} P_x(t+\Delta t) - P_x(t) \\ P_y(t+\Delta t) - P_y(t) \\ P_z(t+\Delta t) - P_z(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_x(t+\Delta t) - P_x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_y(t+\Delta t) - P_y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_z(t+\Delta t) - P_z(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix}$$

velocità del punto P rispetto alla terna A descritto rispetto alla terna A

$${}^Av_{P,A} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix}$$

in generale non sono la stessa cosa



$$ {}^{A}v_{P,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}v_{B,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

velocità della terna B rispetto ad A

$$ {}^{A}v_{P,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{A}v_{P,A} - {}^{A}v_{B,A} $$

$$ {}^{B}v_{P,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} $$

$\hookrightarrow$ perchè si muove sull'asse z in verso opposto.

$$ \boxed{{}^{B}v_{P,B} = {}^{B}_{A}R \cdot {}^{A}v_{P,B}} $$

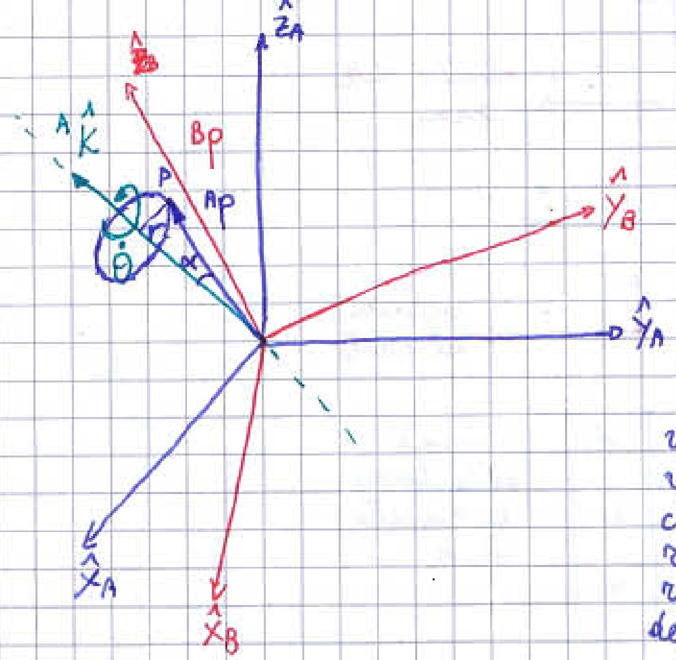
$$ {}^{B}_{A}R \underset{\text{in questo caso}}{=} R_x\big(\underbrace{-\tfrac{\pi}{2}}_{}\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

da A ad B

$$ {}^{B}v_{P,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{OK}} $$

C'è una terna che supporremo sempre fissa, chiamata TERNA INERZIALE. Per i nostri robot la terna inerziale è la terna 0, e di solito si sottintende: $v_P := {}^{0}v_{P,0}$.

$v_{P,A} := {}^{0}v_{P,A}$ $\qquad$ ${}^{A}v_P := {}^{A}v_{P,0}$



$$^{A}\hat{K} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}$$

$$^{A}\omega_{B,A} \triangleq \dot{\vartheta} \cdot {}^{A}\hat{K} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} K_x \\ \dot{\vartheta} K_y \\ \dot{\vartheta} K_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

vettore di velocità angolare che descrive la rotazione di B rispetto ad A, descritto rispetto ad A.

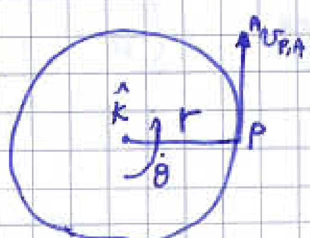
$$\|{}^{A}\omega_{B,A}\| = \dot{\vartheta}$$

Anche la velocità angolare ha un segno: pollice secondo il versore $\hat{K}$ e se stiamo ruotando nel verso delle dita segno +.

P è solidale con la terna B. Anche P ruota con B attorno all'asse K e individua una velocità lineare.

$^{B}v_{P,B} = 0$ perché P è solidale con B : ^{B}P = costante

$^{A}v_{P,A} = ?$ $\quad$ r → raggio circonferenza



$$\|{}^{A}v_{P,A}\| = \dot{\vartheta} \cdot r = \|{}^{A}\omega_{B,A}\| \cdot \|{}^{A}P\| \sin\alpha$$

$$\boxed{{}^{A}v_{P,A} = {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}P}$$ prodotto vettoriale

$$\dot{\vartheta} = \|{}^{A}\omega_{B,A}\|$$

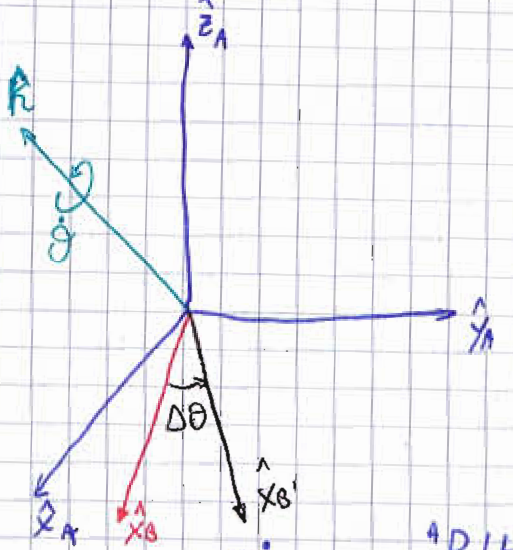
$$r = \|{}^{A}P\| \cdot \sin\alpha$$

Se mi fosse dato ${}^{B}P$, ricavo ${}^{A}P$ come ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P$

$$\boxed{{}^{A}V_{P,A} = {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P}$$

N.B. il prodotto vettoriale va fatto dopo il prodotto scalare tra matrici

$\omega_B \triangleq {}^{0}\omega_{B,0}$ $\quad \omega_{B,A} \triangleq {}^{0}\omega_{B,A}$ $\quad {}^{A}\omega_B \triangleq {}^{A}\omega_{B,0}$



L'orientamento della terna B rispetto alla terna A non è costante.

$$\underbrace{{}^{A}_{B}R(t)}_{{}^{A}_{B}R} \longrightarrow \underbrace{{}^{A}_{B}R(t+\Delta t)}_{{}^{A}_{B'}R}$$

$${}^{A}_{B}\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}_{B}R(t+\Delta t) - {}^{A}_{B}R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}_{B'}R - {}^{A}_{B}R}{\Delta t} \neq 0$$

$${}^{A}_{B'}R = \left[{}^{A}\hat{X}_{B'} \,\middle|\, {}^{A}\hat{Y}_{B'} \,\middle|\, {}^{A}\hat{Z}_{B'} \right]$$

${}^{A}\hat{X}_{B'} = R_K(\Delta\theta)\, {}^{A}\hat{X}_B$ $\quad$ rotazione infinitesima $\Delta\theta \to 0$, pertanto $S\Delta\theta$, $C\Delta\theta$ si possono semplificare:

${}^{A}\hat{Y}_{B'} = R_K(\Delta\theta)\, {}^{A}\hat{Y}_B$

${}^{A}\hat{Z}_{B'} = R_K(\Delta\theta)\, {}^{A}\hat{Z}_B$

$$\begin{cases} \sin\Delta\theta = \Delta\theta \\ \cos\Delta\theta = 1 \end{cases}$$

$$R_K(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} K_x^2(1-C\theta)+C\theta & K_xK_y(1-C\theta)-K_zS\theta & K_zK_x(1-C\theta)+K_yS\theta \\ K_xK_y(1-C\theta)+K_zS\theta & K_y^2(1-C\theta)+C\theta & K_yK_z(1-C\theta)-K_xS\theta \\ K_zK_x(1-C\theta)-K_yS\theta & K_yK_z(1-C\theta)+K_xS\theta & K_z^2(1-C\theta)+C\theta \end{bmatrix}$$

$$R_k(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -K_z\Delta\theta & K_y\Delta\theta \\ K_z\Delta\theta & 1 & -K_x\Delta\theta \\ -K_y\Delta\theta & K_x\Delta\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^A_{B'}R} = \left[R_k(\Delta\theta)\,{}^A\hat{x}_B \;\middle|\; R_k(\Delta\theta)\,{}^A\hat{y}_B \;\middle|\; R_k(\Delta\theta)\,{}^A\hat{z}_B \right] = \boxed{R_k(\Delta\theta)\cdot {}^A_B R}$$

$${}^A_B\dot{R} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{{}^A_{B'}R - {}^A_B R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(R_k(\Delta\theta)\,{}^A_B R - {}^A_B R \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(R_k(\Delta\theta) - I_3 \right){}^A_B R$$

$${}^A_B\dot{R} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\cdot \begin{bmatrix} 0 & -K_z\Delta\theta & K_y\Delta\theta \\ K_z\Delta\theta & 0 & -K_x\Delta\theta \\ -K_y\Delta\theta & K_x\Delta\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^A_B R =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \begin{bmatrix} 0 & -K_z\frac{\Delta\theta}{\Delta t} & K_y\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ K_z\frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 & -K_x\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ -K_y\frac{\Delta\theta}{\Delta t} & K_x\frac{\Delta\theta}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R = \begin{bmatrix} 0 & -K_z\dot\theta & K_y\dot\theta \\ K_z\dot\theta & 0 & -K_x\dot\theta \\ -K_y\dot\theta & K_z\dot\theta & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} {}^A_B R \triangleq S({}^A\omega_{B,A})\cdot {}^A_B R$$

matrice antisimmetrica: $S = -S^T$

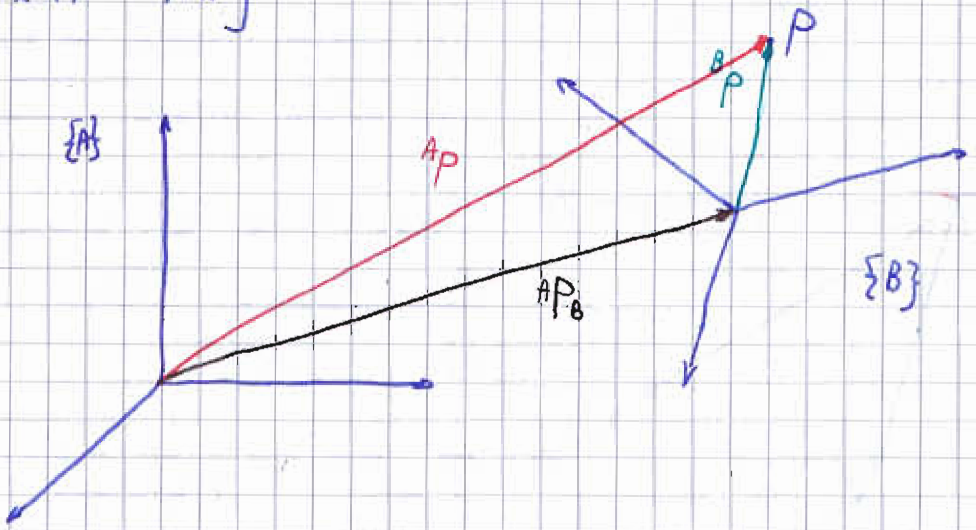
$$\boxed{{}^A_B\dot{R} = S({}^A\omega_{B,A})\cdot {}^A_B R}$$

2

R

$$S({}^{A}\omega_{B,A})\,{}^{A}P = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_y P_z - \omega_z P_y \\ \omega_z P_x - \omega_x P_z \\ \omega_x P_y - \omega_y P_x \end{bmatrix} = {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}P$$



$\{B\}$ rototrasla rispetto ad $\{A\}$.
$\{A\}$ ferma
P si muove rispetto alla terna $\{B\}$

$${}^{A}\bar{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\bar{P} \qquad \text{oppure} \qquad {}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P + {}^{A}P_B$$

${}^{A}v_{P,A} = \,?$ PROBLEMA DELLA COMPOSIZIONE DI VELOCITÀ

$${}^{A}v_{P,A} = {}^{A}\dot{P} = {}^{A}_{B}\dot{R} \cdot {}^{B}P + {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}\dot{P} + {}^{A}\dot{P}_B =$$

$$= S({}^{A}\omega_{B,A})\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}v_{P,B} + {}^{A}v_{B,A} \Rightarrow$$

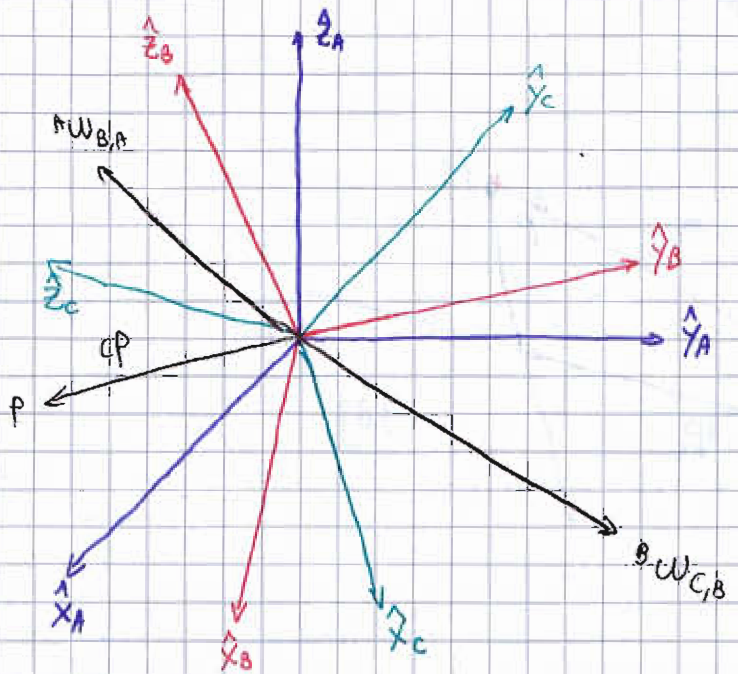
$$\boxed{{}^{A}v_{P,A} = {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}v_{P,B} + {}^{A}v_{B,A}}$$

${}^{A}v_{B,A} \rightarrow$ velocità lineare della terna B rispetto ad A.

${}^A_B R\, {}^B v_{P,B}$ → velocità relativa del punto P rispetto alla terna B, descritto rispetto alla terna A.

${}^A\omega_{B,A} \times {}^A_B R\, {}^B P$ → velocità angolare dovuta alla rotazione.

4/11/09



{A} fissa

{B} ruota rispetto ad {A}

{C} ruota rispetto a {B}

${}^A\omega_{B,A}$, ${}^B\omega_{C,B}$ li conosco.

Devo trovare ${}^A\omega_{C,A}$.

${}^C P$ è costante

$${}^A P = {}^A_C R\, {}^C P = {}^A_B R \cdot {}^B_C R\, {}^C P$$

$${}^A v_{P,A} = {}^A\dot{P} = {}^A_C\dot{R}\, {}^C P + {}^A_C R \cdot {}^C\dot{P} = {}^A_C\dot{R}\, {}^C P = S({}^A\omega_{C,A}) \underbrace{{}^A_C R \cdot {}^C P}_{\text{vettore}} = {}^A\omega_{C,A} \times {}^A_C R \cdot {}^C P$$

costante ⇒ 0

$${}^A v_{P,A} = {}^A\dot{P} = {}^A_B\dot{R}\, {}^B_C R\, {}^C P + {}^A_B R\, {}^B_C\dot{R}\, {}^C P + \cancel{{}^A_B R\, {}^B_C R\, {}^C\dot{P}} = S({}^A\omega_{B,A})\, {}^A_B R\, {}^B_C R\, {}^C P + {}^A_B R\, S({}^B\omega_{C,B})\, {}^B_C R\, {}^C P =$$

0

$$= S({}^A\omega_{B,A})\, {}^A_C R\, {}^C P + {}^A_B R ({}^B\omega_{C,B} \times {}^B_C R \cdot {}^C P) =$$

$$= {}^A\omega_{B,A} \times {}^A_C R\, {}^C P + {}^A_B R\, {}^B\omega_{C,B} \times \underbrace{\boxed{{}^A_B R\, {}^B_C R}}_{{}^A_C R}\, {}^C P = \left[{}^A\omega_{B,A} + {}^A_B R\, {}^B\omega_{C,B}\right] \times {}^A_C R\, {}^C P$$

solo in questo caso

⇓

Il prodotto tra matrici e il prodotto vettoriale non godono della proprietà distributiva, eccetto che per le matrici di rotazione, che sono matrici ORTONORMALI (colonne ortogonali tra loro e di modulo 1) PROPRIE (determinante = 1).

Uguagliando le due espressioni della velocità ottengo:

$$\boxed{{}^{A}\omega_{C,A} = {}^{A}\omega_{B,A} + {}^{A}_{B}R\, {}^{B}\omega_{C,B}}$$

COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ ANGOLARI

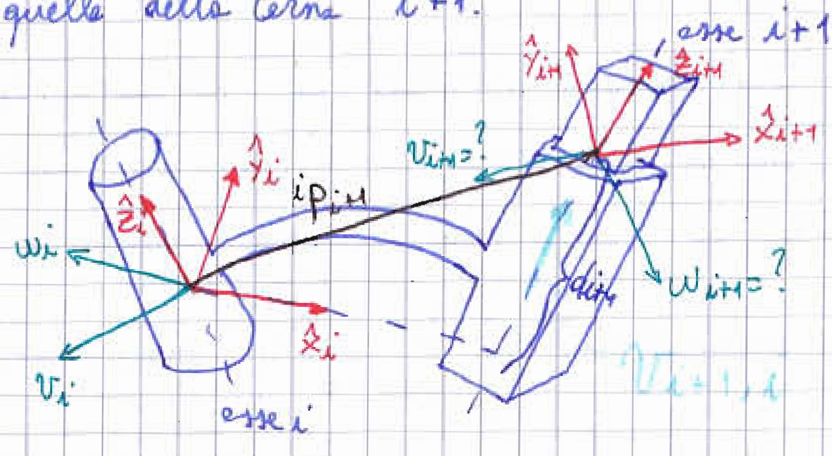
1

Grazie a queste relazioni la cinematica differenziale diretta si risolve in modo immediato.

Dato il valore delle velocità di giunto, trovare la velocità lineare e angolare dell'organo utensile:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \Longrightarrow v_N,\ \omega_N$$

Il problema viene risolto mediante un algoritmo. Cerco una formula che date le velocità della terna i riesce a calcolare quelle della terna $i+1$.



Da qualche parte ci sarà anche la terna 0, che è la terna immobile.

La terna i sta rototraslando rispetto alla terna 0. Stesso caso della composizione fra terne:

$\{A\} \equiv \{0\}$ $\{B\} \equiv \{i\}$ $P \equiv \{i+1\}_{\text{ORIGINE}}$

Uso le stesse relazioni trovate in precedenza.

$${}^{A}v_{P,A} = {}^{A}v_{B,A} + {}^{A}_{B}R\, {}^{B}v_{P,B} + {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P$$

LA TERNA 0 SI SOTTINTENDE

$$^0v_{i+1,0} = {^0v_{i,0}} + {^0_iR}\,{^iv_{i+1,i}} + {^0\omega_{i,0}} \times {^0_iR}\,{^iP_{i+1}}$$

E ho già risolto il primo problema (v_{i+1}). Ma è poco efficiente dal punto di vista computazionale. Il problema è la ${^0_iR} = {^0_1R}\cdot{^1_2R}\cdots{^{i-1}_iR}$ che consuma molto tempo.

Cerco una forma che eviti questo calcolo. Moltiplico ambo i membri per ${^{i+1}_0R} = {^{i+1}_iR}\,{^i_0R}$

$${^{i+1}_0R}\cdot{^0v_{i+1,0}} = \underbrace{{^{i+1}_iR}\,{^i_0R}\,{^0v_{i,0}}} + {^{i+1}_0R}\,{^0_iR}\,{^iv_{i+1,i}} + {^{i+1}_iR}\,{^i_0R}\left[{^0\omega_{i,0}} \times {^0_iR}\,{^iP_{i+1}}\right]$$

$${^{i+1}_0R}\,{^0v_{i+1,0}} = {^{i+1}_iR}\cdot{^iv_{i,0}} + {^{i+1}v_{i+1,i}} + {^{i+1}_iR}\cdot\left[{^i_0R}\,{^0\omega_{i,0}} \times \underbrace{{^i_0R}\,{^0_iR}}_{Id}\,{^iP_{i+1}}\right]$$

$$\boxed{{^{i+1}v_{i+1}} = {^{i+1}_iR}\left[{^iv_i} + {^i\omega_i} \times {^iP_{i+1}}\right] + {^{i+1}v_{i+1,i}}}$$

Abbiamo il prodotto per una singola matrice di rotazione, che semplifica i calcoli dal punto di vista computazionale. Nei controllori dei manipolatori si trova quasi sempre questa formula.

Dalla cinematica diretta conosco ${^i_{i+1}T} = \left[\begin{array}{c|c} {^i_{i+1}R} & {^iP_{i+1}} \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$ per cui ${^{i+1}_iR} = {^i_{i+1}R^T}$; ${^iv_i}$ e ${^i\omega_i}$ le conosco; l'unica cosa che mi manca è ${^{i+1}v_{i+1,i}}$, cioè la velocità relativa della terna $i+1$ rispetto alla i.

$${^{i+1}v_{i+1,i}} = \dot{d}_{i+1}\cdot{^{i+1}\hat{z}_{i+1}} = \dot{d}_{i+1}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{d}_{i+1}\end{bmatrix}$$

Se il giunto fosse rotoidale, ${^{i+1}v_{i+1,i}} = 0$

$${^{i+1}v_{i+1,i}} = \begin{cases} \dot{d}_{i+1}\,{^{i+1}\hat{z}_{i+1}} & \text{PRISMATICO} \\ 0 & \text{ROTOIDALE} \end{cases}$$

$$ {}^0v_0 \rightarrow {}^1v_1 \rightarrow {}^2v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow {}^Nv_N $$

* ${}^0v_0$ devo conoscerla. Per i robot industriali è 0, in generale potrei avere il robot sopra una base mobile: in questo caso avrei v_0 = velocità della base.

* $v_N = {}^0_NR\ {}^Nv_N$

Ora mi manca calcolare la velocità angolare. Uso sempre la relazione trovata in precedenza per le terne.

$$ {}^A\omega_{C,A} = {}^A\omega_{B,A} + {}^A_BR\ {}^B\omega_{C,B} $$

Sostituisco $\{A\} \equiv \{0\}$ $\{B\} \equiv \{i\}$ $\{C\} \equiv \{i+1\}$

$$ {}^0\omega_{i+1,0} = {}^0\omega_{i,0} + {}^0_iR\ {}^i\omega_{i+1,i} $$

${}^0_iR$ mi dà fastidio: moltiplico ambo i membri per ${}^{i+1}_0R = {}^{i+1}_i\cdot{}^i_0R$

$$ {}^{i+1}_0R\ {}^0\omega_{i+1,0} = {}^{i+1}_iR\,{}^i_0R\ {}^0\omega_{i,0} + {}^{i+1}_0R\ {}^0_iR\ {}^i\omega_{i+1,i} $$

$$ \boxed{{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_iR\ {}^i\omega_i + {}^{i+1}\omega_{i+1,i}} $$

Ancora una volta devo trovare ${}^{i+1}\omega_{i+1,i}$, cioè la velocità angolare relativa della terna $i+1$ rispetto a i.

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1,i} = \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ \dot{\vartheta}_{i+1}\ {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases} $$

$$ {}^0\omega_0 \rightarrow {}^1\omega_1 \rightarrow {}^2\omega_2 \rightarrow \ldots \rightarrow {}^N\omega_N $$

* ${}^0\omega_0$ devo conoscerla, non sempre nulla.

Passiamo ora ad analizzare il caso in cui le velocità non sono costanti: parliamo di ACCELERAZIONI.

$$ {}^A a_{P,A} = {}^A \dot{v}_{P,A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^A v_{P,A}(t+\Delta t) - {}^A v_{P,A}(t)}{\Delta t} $$

ACCELERAZIONE LINEARE DEL PUNTO P RISPETTO ALLA TERNA {A}

$$ {}^A \alpha_{B,A} = {}^A \dot{\omega}_{B,A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^A \omega_{B,A}(t+\Delta t) - {}^A \omega_{B,A}(t)}{\Delta t} $$

ACCELERAZIONE ANGOLARE DELLA TERNA {B} RISPETTO ALLA TERNA {A}

Anche per le accelerazioni si può usare la notazione compatta.

COMPOSIZIONE DI ACCELERAZIONI ANGOLARI

Prima ho ricavato ${}^A\omega_{C,A} = {}^A\omega_{B,A} + {}^A_B R\, {}^B\omega_{C,B}$ e ora basta derivare

$$ {}^A\alpha_{C,A} = {}^A\dot{\omega}_{C,A} = {}^A\dot{\omega}_{B,A} + {}^A_B\dot{R}\, {}^B\omega_{C,B} + {}^A_B R\, {}^B\dot{\omega}_{C,B} $$

$$ {}^A\alpha_{C,A} = {}^A\alpha_{B,A} + S({}^A\omega_{B,A})\, {}^A_B R\, {}^B\omega_{C,B} + {}^A_B R\, {}^B\alpha_{C,B} = $$

$$ \boxed{{}^A\alpha_{C,A} = {}^A\alpha_{B,A} + {}^A_B R\, {}^B\alpha_{C,B} + {}^A\omega_{B,A} \times {}^A_B R\, {}^B\omega_{C,B}} $$

Come prima, voglio un algoritmo ricorsivo per il calcolo.

$$ {}^0\alpha_{i+1,0} = {}^0\alpha_{i,0} + {}^0_i R\, {}^i\alpha_{i+1,i} + {}^0\omega_{i,0} \times {}^0_i R\, {}^i\omega_{i+1,i} $$

dove ho sostituito $\{A\}=0$, $\{B\}=\{i\}$, $\{C\}=\{i+1\}$. Moltiplico per ${}^{i+1}_0 R$

$$ {}^{i+1}_0 R\, {}^0\alpha_{i+1,0} = {}^{i+1}_i R\, {}^i_0 R\, {}^0\alpha_{i,0} + {}^{i+1}_0 R\, {}^0_i R\, {}^i\alpha_{i+1,i} + {}^{i+1}_i R\, {}^i_0 R \left[{}^0\omega_{i,0} \times {}^0_i R\, {}^i\omega_{i+1,i} \right] = $$

$$ {}^{i+1}\alpha_{i+1} = {}^{i+1}_i R\, {}^i\alpha_i + {}^{i+1}\alpha_{i+1,i} + {}^{i+1}_i R \left[{}^i\omega_i \times {}^i\omega_{i+1,i} \right] $$

$$ {}^{i+1}\alpha_{i+1} = {}^{i+1}_i R\, {}^i\alpha_i + {}^{i+1}_i R\, {}^i_0 R\, {}^0\omega_{i,0} \times {}^{i+1}_i R\, {}^i_0 R\, {}^0_i R\, {}^i\omega_{i+1,i} + {}^{i+1}\alpha_{i+1,i} $$

$$\boxed{{}^{i+1}\alpha_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \, {}^{i}\alpha_i + {}^{i+1}_{i}R \, {}^{i}\omega_i \times {}^{i+1}\omega_{i+1,i} + {}^{i+1}\alpha_{i+1,i}}$$

Mi manca conoscere ${}^{i+1}\alpha_{i+1,i}$, cioè l'accelerazione angolare relativa della terna $i+1$ rispetto a i.

$${}^{i+1}\alpha_{i+1,i} = \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ \ddot{\vartheta}_{i+1} \, {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases}$$

9/11/2009

COMPOSIZIONE DI ACCELERAZIONI

${}^{A}v_{P,A} = {}^{A}v_{B,A} + {}^{A}_{B}R \, {}^{B}v_{P,B} + {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P$ questa era la relazione per le velocità.

${}^{A}a_{P,A} = ?$

$${}^{A}a_{P,A} = {}^{A}\dot{v}_{P,A} = {}^{A}\dot{v}_{B,A} + {}^{A}_{B}\dot{R} \, {}^{B}v_{P,B} + {}^{A}_{B}R \, {}^{B}\dot{v}_{P,B} + {}^{A}\dot{\omega}_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P +$$
$$+ {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}\dot{R} \, {}^{B}P + {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}\dot{P} =$$
$$= {}^{A}a_{B,A} + S({}^{A}\omega_{B,A}) \, {}^{A}_{B}R \, {}^{B}v_{P,B} + {}^{A}_{B}R \, {}^{B}a_{P,B} + {}^{A}\alpha_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P + {}^{A}\omega_{B,A} \times S({}^{A}\omega_{B,A}) \, {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P +$$
$$+ {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}v_{P,B} =$$
$$= {}^{A}a_{B,A} + 2 \, {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}v_{P,B} + {}^{A}_{B}R \, {}^{B}a_{P,B} + {}^{A}\alpha_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P + {}^{A}\omega_{B,A} \times ({}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P)$$

$${}^{A}a_{P,A} = \overbrace{{}^{A}a_{B,A}}^{1} + \overbrace{2 \, {}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}v_{P,B}}^{2} + \overbrace{{}^{A}_{B}R \, {}^{B}a_{P,B}}^{3} + \overbrace{{}^{A}\alpha_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P}^{4} + \overbrace{{}^{A}\omega_{B,A} \times ({}^{A}\omega_{B,A} \times {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P)}^{5}.$$

1) accelerazione relativa tra B e A
3) accelerazione relativa di P rispetto a B
4) accelerazione angolare di B rispetto ad A che ne genera una lineare
5) accelerazione centripeta
2) accelerazione di CORIOLIS

Consideriamo ora il manipolatore: $\{A\} = \{0\}$ $\{B\} = \{i\}$ $P = \{i+1\}$

$$ {}^{0}a_{i+1,0} = {}^{0}a_{i,0} + {}^{0}_{i}R\,{}^{i}a_{i+1,i} + {}^{0}\alpha_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1} + 2\,{}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}v_{i+1,i} + {}^{0}\omega_{i,0} \times ({}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1}) $$

lunga da calcolare

↓

descrivo ${}^{0}a_{i+1,0}$ secondo la terna i: moltiplico per ${}^{i+1}_{0}R$

$$ {}^{i+1}_{0}R\,{}^{0}a_{i+1,0} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,{}^{0}a_{i,0} + \underbrace{{}^{i+1}_{0}R\,{}^{0}_{i}R\,{}^{i}a_{i+1,i}} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,({}^{0}\alpha_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1}) + $$
$$ + 2\,{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,({}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}v_{i+1,i}) + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,[{}^{0}\omega_{i,0} \times ({}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1})] = $$
$$ = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}a_{i,0} + {}^{i+1}a_{i+1,i} + {}^{i+1}_{i}R\,({}^{i}\alpha_{i,0} \times {}^{i}p_{i+1}) + 2\,{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,{}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}_{0}R\,{}^{0}_{i}R\,{}^{i}v_{i+1,i} $$
$$ + {}^{i+1}_{i}R\,[{}^{i}\omega_{i,0} \times {}^{i}_{0}R\,({}^{0}\omega_{i,0} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1})] $$

$$ \boxed{ {}^{i+1}a_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,[{}^{i}a_{i} + {}^{i}\alpha_{i} \times {}^{i}p_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}p_{i+1})] + {}^{i+1}a_{i+1,i} + 2\,\underbrace{{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i}}_{{}^{i+1}\omega_{i+1}} \times {}^{i+1}v_{i+1,i} } $$

↓ noto da ${}^{i+1}_{i}T$ ↓ noto ↓ noto ↓ noto da ${}^{i+1}_{i}T$ ↓ noto ↓ ? ↓ ?

$$ {}^{i+1}v_{i+1,i} = \begin{cases} 0 & \text{ROTOIDALE} \\ \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{PRISMATICO} \end{cases} $$

$$ {}^{i+1}a_{i+1,i} = \begin{cases} 0 & \text{ROTOIDALE} \\ \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{PRISMATICO} \end{cases} $$

So che ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + {}^{i+1}\omega_{i+1,i}$; sostituisco al posto di questo ${}^{i+1}\omega_{i+1}$. Questo perché

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + {}^{i+1}\omega_{i+1} = \begin{cases} {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} & \text{se il giunto è prismatico} \\ {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + {}^{i+1}\omega_{i+1} & \text{se il giunto è rotoidale,} \end{cases} $$

ma poiché viene moltiplicato per ${}^{i+1}v_{i+1,i}$ che è nullo per giunto rotoidale, ok

$${}^0\alpha_0 \rightarrow {}^1\alpha_1 \rightarrow {}^2\alpha_2 \rightarrow \ldots \rightarrow {}^N\alpha_N$$

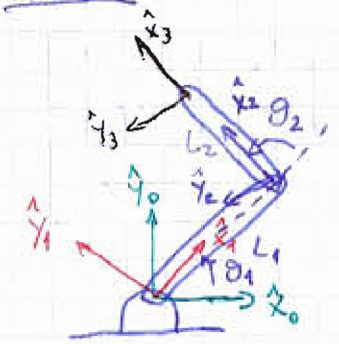
$${}^0a_0 \rightarrow {}^1a_1 \rightarrow {}^2a_2 \rightarrow \ldots \rightarrow {}^Na_N$$

${}^0\alpha_0$ e ${}^0a_0$ dipendono dalla situazione in cui è il manipolatore.
${}^0a_0$ non è 0 se il manipolatore è fermo perché è soggetto all'accelerazione di gravità.

$${}^0a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +g \end{bmatrix}$$

↳ perché va verso l'alto (ascensore), cioè verso opposto rispetto a quello della terra.

ESEMPIO



	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	L_1	θ_2	0
3	0	L_2	0	0

Metto un'altra terna (3) nell'organo utensile ottenuta traslando la 2.
Nell'ultima riga non c'è nessuna variabile di giunto.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^1_2R$ ${}^1P_2$

$${}^3_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applico ora le formule ricorsive appena viste.

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + {}^{i+1}\omega_{i+1,i}$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}p_{i+1}\right) + \underbrace{{}^{i+1}\cancel{v_{i+1,i}}}_{0}$$

0 giunti rotoidali

1) $${}^{1}\omega_1 = {}^{1}_{0}R\,\underbrace{\cancel{{}^{0}\omega_0}}_{0} + {}^{1}\omega_{1,0} = \dot\vartheta_1\,{}^{1}\hat z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}v_1 = {}^{1}_{0}R\left(\underbrace{\cancel{{}^{0}v_0}}_{0} + \underbrace{\cancel{{}^{0}\omega_0}}_{0} \times {}^{0}p_1\right) = 0$$

2) $${}^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1 + \underbrace{{}^{2}\omega_{2,1}}_{\dot\vartheta_2\,{}^{2}\hat z_2} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^{2}v_2 = {}^{2}_{1}R\left(\underbrace{\cancel{{}^{1}v_1}}_{0} + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}p_2\right) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ 0 & 0 & \dot\vartheta_1 \\ L_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1\dot\vartheta_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 L_1 \dot\vartheta_1 \\ c_2 L_1 \dot\vartheta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) $${}^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,{}^{2}\omega_2 + \underbrace{\cancel{{}^{3}\omega_{3,2}}}_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^{3}v_3 = {}^{3}_{2}R\left({}^{2}v_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}p_3\right) = \dots = \begin{bmatrix} L_1 s_2 \dot\vartheta_1 \\ L_1 c_2 \dot\vartheta_1 + (\dot\vartheta_1\,\dot\vartheta_2)L_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ho risolto la cinematica differenziale diretta.

$${}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}v_3 = \begin{bmatrix} L_1 s_2 & 0 \\ L_1 c_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\vartheta_1 \\ \dot\vartheta_2 \end{bmatrix}$$

Qualcuno si è inventato questa cosa:

$$ {}^3\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} {}^3v_3 \\ --- \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 S_2 & 0 \\ L_1 C_2 + L_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^3J_g(\bar{q})} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{{}^3\bar{v}_3 = J_g(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}}} $$

VELOCITÀ GENERALIZZATA DELLA TERNA UTENSILE

→ JACOBIANO GEOMETRICO

- Un manipolatore a 6 giunti ha uno Jacobiano lungo pagine!
Meglio il metodo iterativo in generale.

$$ {}^0v_3 = {}^0_3R\,{}^3v_3 $$

$$ {}^0\omega_3 = {}^0_3R\,{}^3\omega_3 $$

componente relativa dovuta al fatto che il 1° giunto si muove

11/11/2009

$$ {}^0\bar{v}_3 = J_g(\bar{q})\,\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} {}^0v_3 \\ --- \\ {}^0\omega_3 \end{bmatrix} = {}^6\Bigg\{ \underbrace{\begin{bmatrix} J_{v_1}(\bar{q}) & J_{v_2}(\bar{q}) & \dots & J_{v_N}(\bar{q}) \\ \hline J_{\omega_1}(\bar{q}) & J_{\omega_2}(\bar{q}) & \dots & J_{\omega_N}(\bar{q}) \end{bmatrix}}_{N} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} \Bigg\} N $$

$$ {}^3\bar{v}_3 = {}^3J_g(\bar{q})\,\dot{q} $$

Posso calcolare $J_{v_i}(\bar{q})$ e $J_{\omega_i}(\bar{q})$? Sì. Ricavo $J_{\omega_i}(\bar{q})$

$$ {}^0\omega_N = {}^0\omega_{N-1,0} + {}^0_{N-1}R\,{}^{N-1}\omega_{N,N-1} = {}^0\omega_{N-1,0} + {}^0\omega_{N,N-1} = {}^0\omega_{N-2,0} + {}^0\omega_{N-1,N-2} + {}^0\omega_{N,N-1} \dots $$

$$ = {}^0\omega_{1,0} + {}^0\omega_{2,1} + {}^0\omega_{3,2} + \dots + {}^0\omega_{N,N-1} $$

Com'è fatto il generico termine ${}^0\omega_{i+1,i}$?

$$ {}^0\omega_{i+1,i} = {}^0_{i+1}R\,{}^{i+1}\omega_{i+1,i} = {}^0_{i+1}R \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ \dot{\vartheta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ {}^0_{i+1}R\,\dot{\vartheta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases} $$

Essendo $\dot{\vartheta}_{i+1}$ uno scalare, lo posso portare fuori:

$$= \dot{\vartheta}_{i+1} \cdot \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ {}^{0}_{i+1}R \; {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases} = \dot{q}_{i+1} \begin{cases} 0 & \text{PRISM.} \\ {}^{0}_{i+1}R \; {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} & \text{ROT.} \end{cases} = \dot{q}_{i+1} \begin{cases} 0 & \text{PRISM.} \\ {}^{0}\hat{z}_{i+1} & \text{ROT.} \end{cases}$$

Definisco $J_{\omega_{i+1}} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ {}^{0}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases}$, quindi ${}^{0}\omega_{i+1,i} = J_{\omega_{i+1}}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_{i+1}$

$${}^{0}\omega_{N,0} = J_{\omega_1}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_1 + J_{\omega_2}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_2 + \ldots + J_{\omega_N}(\bar{q}) \cdot \dot{q}_N =$$

$$= \left[J_{\omega_1}(\bar{q}) \;\vdots\; J_{\omega_2}(\bar{q}) \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; J_{\omega_N}(\bar{q}) \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}$$

$$\boxed{J_{\omega_{i+1}}(\bar{q}) = \begin{cases} 0 & \text{PRISMATICO} \\ {}^{0}\hat{z}_{i+1} & \text{ROTOIDALE} \end{cases} \qquad J_{v_{i+1}}(\bar{q}) = \begin{cases} {}^{0}\hat{z}_{i+1} & \text{PRISMATICO} \\ {}^{0}\hat{z}_{i+1} \times \left[{}^{0}P_i - {}^{0}P_{i+1} \right] & \text{ROTOIDALE} \end{cases}}$$

${}^{0}\hat{z}_{i+1}$ lo ricavo dalla matrice di trasformazione omogenea:

$${}^{0}_{i+1}T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^{0}\hat{x}_{i+1} & {}^{0}\hat{y}_{i+1} & {}^{0}\hat{z}_{i+1} & {}^{0}P_{i+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \qquad {}^{0}_{i}T = \left[\begin{array}{c|c} {}^{0}_{i}R & {}^{0}P_i \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array} \right]$$

${}^{A}J_g(\bar{q}) \neq {}^{B}J_g(\bar{q})$ in generale, ma c'è una relazione tra i due, dato che descrivono la stessa velocità.

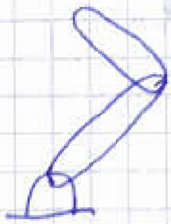
$${}^{A}\bar{v}_N = \begin{bmatrix} {}^{A}v_N \\ \hline {}^{A}\omega_N \end{bmatrix} = {}^{A}J_g(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}} \qquad \text{ma} \quad {}^{A}v_N = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}v_N \qquad {}^{A}\omega_N = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}\omega_N$$

$${}^{A}\bar{v}_N = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R \; {}^{B}v_N \\ \hline {}^{A}_{B}R \; {}^{B}\omega_N \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array} \right]}_{2\times 2} \begin{bmatrix} {}^{B}v_N \\ \hline {}^{B}\omega_N \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & 0 \\ \hline 0 & {}^{A}_{B}R \end{array} \right] \cdot \underbrace{{}^{B}J_g(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}}}_{{}^{B}\bar{v}_N}$$

$$\boxed{{}^{A}J_g(\bar{q}) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J_g(\bar{q})}$$

Questa matrice è singolare se ${}^{A}_{B}R$ è singolare, ma ${}^{A}_{B}R$

Riprendo l'esempio fatto in precedenza e calcolo J_g con il nuovo metodo:



$$\begin{array}{cccc} & & {}^{0}\hat{z}_1 & {}^{0}p_1 \end{array}$$

$${}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}_{2}T = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & L_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & L_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & {}^{0}\hat{z}_2 & \end{array}$$

$${}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & L_2C_{12} + L_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & L_2S_{12} + L_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ \\ \\ \end{array}$$

Tutti i giunti sono rotoidali, quindi

$$J_{\omega_i} = {}^{0}\hat{z}_i$$

$$J_{v_i} = {}^{0}\hat{z}_i \times \left[{}^{0}p_N - {}^{0}p_i\right]$$

$$J_g(\bar{q}) = \begin{bmatrix} J_{v_1}(\bar{q}) & J_{v_2}(\bar{q}) \\ \hline J_{\omega_1}(\bar{q}) & J_{\omega_2}(\bar{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2S_{12} - L_1S_1 & -L_2S_{12} \\ L_2C_{12} + L_1C_1 & L_2C_{12} \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_1} = {}^{0}\hat{z}_1 \times \left[{}^{0}p_3 - {}^{0}p_1\right] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_2} = {}^0\hat{z}_2 \times \left[{}^0P_3 - {}^0P_2\right] = {}^0\hat{z}_2 \times \begin{bmatrix} \underbrace{L_2 c_{12} + L_1 c_1 - L_1 c_1}_{a} \\ \underbrace{L_2 s_{12} + L_1 s_1 - L_1 s_1}_{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -L_2 s_{12} \\ L_2 c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano geometrico ha N colonne e 6 righe, dove N è il numero delle variabili di giunto.
Si può usare uno Jacobiano ridotto, ignorando le righe nulle:

$${}^0\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} {}^0v_{x_3} \\ {}^0v_{y_3} \\ {}^0\omega_{z_3} \end{bmatrix} \text{ e nell'esempio } = \underbrace{J_g}_{3 \text{ righe}}(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}}$$

JACOBIANO ANALITICO

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} {}^0P_N \\ --- \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \\ p_y(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \\ p_z(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \\ \alpha(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \\ \beta(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \\ \gamma(q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots q_N(t)) \end{bmatrix}$$ SPAZIO OPERATIVO

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} {}^0\dot{P}_N \\ --- \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} \cdot \underbrace{\frac{dq_1}{dt}}_{\dot{q}_1} + \frac{\partial p_x}{\partial q_2} \cdot \underbrace{\frac{dq_2}{dt}}_{\dot{q}_2} + \dots \frac{\partial p_x}{\partial q_N} \cdot \underbrace{\frac{dq_N}{dt}}_{\dot{q}_N} \\ \dots \\ \dots \\ --- \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \gamma}{\partial q_N} \cdot \frac{dq_N}{dt} \end{bmatrix} =$$

DERIVATA POSIZIONE NELLO SPAZIO OPERATIVO

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} + \frac{\partial p_x}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial p_x}{\partial q_N} \\ \dots \\ \dots \\ --- \\ \dots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} + \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial \gamma}{\partial q_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \underbrace{J_a(\bar{q})}_{\text{JACOBIANO ANALITICO}} \cdot \dot{q}}$$

J_a e J_g sono uguali se e solo se $\dot{x} = {}^0\bar{v}_N$, cioè

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{p}_N \\ \hline \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0v_N \\ \hline {}^0\omega_N \end{bmatrix} \qquad {}^0\dot{p}_N \triangleq {}^0v_{N,0}$$

quindi le prime tre componenti dei vettori sono uguali.

$\dot{\phi}$ → derivata della notazione minima

${}^0\omega_N$ → velocità angolare della terna utensile

DIVERSE

$\dot{x} \neq {}^0\bar{v}_N$ quindi $\boxed{J_a(\bar{q}) \neq J_g(\bar{q})}$

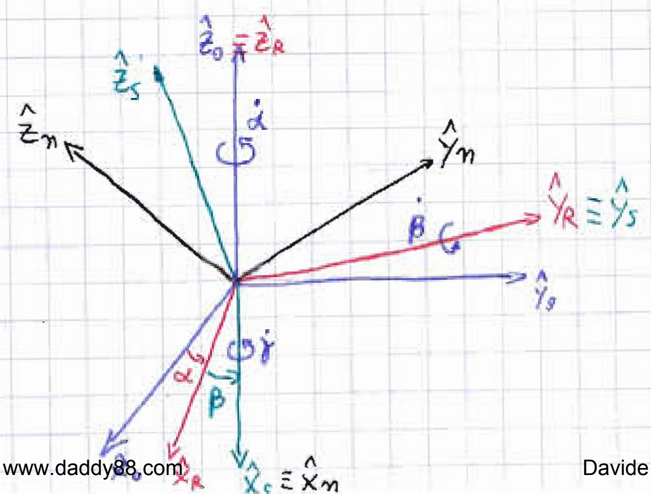
Ricaveremo che
$$\boxed{\begin{aligned} {}^0\omega_N &= T_{22}(\phi) \cdot \dot{\phi} \\ {}^0v_N &= I_3 \cdot {}^0\dot{p}_N \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} {}^0\bar{v}_N = \begin{bmatrix} {}^0v_N \\ \hline {}^0\omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \cdot {}^0\dot{p}_N \\ \hline T_{22}(\phi) \cdot \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & T_{22}(\phi) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0\dot{p}_N \\ \hline \dot{\phi} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ 0 & T_{22}(\phi) \end{array}\right] J_a(\bar{q})\dot{\bar{q}} \\ {}^0\bar{v}_N = J_g(\bar{q}) \cdot \dot{\bar{q}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_g(\bar{q}) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & T_{22}(\phi) \end{bmatrix}}_{T(\phi)} J_a(\bar{q})}$$

16/11/09

Devo trovare $T_{22}(\phi)$



Uso la notazione minima per assi mobili $z'y'x'$

α, β, γ non sono costanti, variano nel tempo

$${}^{0}\omega_{R,0} = \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0$$

$${}^{0}\omega_{S,0} = {}^{0}\omega_{R,0} + {}^{0}\omega_{S,R} = \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, {}^{0}\hat{y}_R = \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, {}^{0}_{R}R\, {}^{R}\hat{y}_R =$$

$$= \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, R_z(\alpha)\, {}^{R}\hat{y}_R$$

$${}^{0}\omega_{N,0} = {}^{0}\omega_{R,0} + {}^{0}\omega_{S,R} + {}^{0}\omega_{N,S} = \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, R_z(\alpha)\, {}^{R}\hat{y}_R + \dot{\gamma}\, {}^{0}\hat{x}_S =$$

$$= \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, R_z(\alpha)\, {}^{R}\hat{y}_R + \dot{\gamma}\, {}^{0}_{S}R\, {}^{S}\hat{x}_S = \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, R_z(\alpha)\, {}^{R}\hat{y}_R + \dot{\gamma}\, {}^{0}_{R}R\, {}^{R}_{S}R\, {}^{S}\hat{x}_S =$$

$$= \dot{\alpha}\, {}^{0}\hat{z}_0 + \dot{\beta}\, R_z(\alpha)\, {}^{R}\hat{y}_R + \dot{\gamma}\, R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, {}^{S}\hat{x}_S =$$

$$= \dot{\alpha}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \dot{\beta}\begin{bmatrix}C\alpha & -S\alpha & 0\\ S\alpha & C\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \dot{\gamma}\begin{bmatrix}C\alpha & -S\alpha & 0\\ S\alpha & C\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\beta & 0 & S\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -S\beta & 0 & C\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 - \dot{\beta} S\alpha\\ 0 + \dot{\beta} C\alpha\\ \dot{\alpha} + 0\end{bmatrix} + \dot{\gamma}\begin{bmatrix}C\alpha C\beta & 0 & 0\\ S\alpha C\beta & 0 & 0\\ -S\beta & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{\beta} S\alpha + \dot{\gamma} C\alpha C\beta\\ \dot{\beta} C\alpha + \dot{\gamma} S\alpha C\beta\\ \dot{\alpha} - \dot{\gamma} S\beta\end{bmatrix}$$

$${}^{0}\omega_{N,0} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -S\alpha & C\alpha C\beta\\ 0 & C\alpha & S\alpha C\beta\\ 1 & 0 & -S\beta\end{bmatrix}}_{T_{22}(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}}_{\dot{\phi}} \Longrightarrow T_{22}(\phi) = \begin{bmatrix}0 & -S\alpha & C\alpha C\beta\\ 0 & C\alpha & S\alpha C\beta\\ 1 & 0 & -S\beta\end{bmatrix}$$

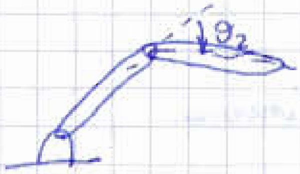
$$T(\phi) = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0\\ \hline 0 & T_{22}(\phi)\end{array}\right]$$

$\bar{v}_N = J_g(\bar{q})\, \dot{\bar{q}}$

↳ variabile nel tempo, essendo dipendente dalle variabili di giunto. Può essere pertanto che il rango della matrice si abbassi. Questi punti si chiamano PUNTI DI SINGOLARITÀ CINEMATICA.

In questi punti:
- si ha una perdita di mobilità della struttura, ovvero non possiamo assegnare alla struttura movimenti arbitrari;
- possono esistere ∞ soluzioni del problema di cinematica inversa;
- in un intorno a piccole velocità nello spazio operativo possono corrispondere velocità ∞ o elevatissime nello spazio dei giunti.

Ci sono singolarità cinematiche di frontiera (un braccio disteso) o interne allo spazio operativo (due bracci allineati).

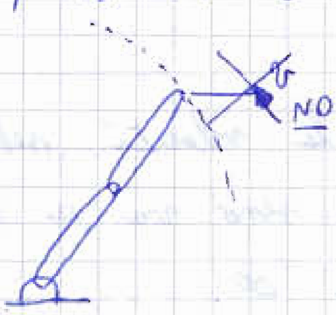


$${}^3J_g = \begin{bmatrix} L_1 \sin\theta_2 & 0 \\ L_1\cos\theta_2 + L_2 & L_2 \end{bmatrix}$$ Jacobiano ridotto

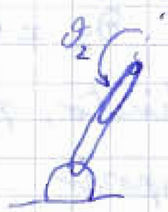
$$\det {}^3J_g = L_1 L_2 \sin\theta_2 \quad \text{in generale, } rg = 2$$

Se $\sin\theta_2 = 0$ ovvero $\theta_2 = 0, \pi$, $rg\, {}^3J_g = 1$

$\Rightarrow$ i punti con $\theta_2 = 0, \pi$ sono punti di singolarità cinematica



$\theta_2 = 0$



$\theta_2 = \pi$

θ_1 = qualsiasi

↳ ∞ soluzioni cinematica inversa

Non posso applicare una velocità fuori dallo spazio di lavoro.

$$ {}^0J_g = \begin{bmatrix} -L_1 S_1 - L_2 S_{12} & -L_2 S_{12} \\ L_1 C_1 + L_2 C_{12} & L_2 C_{12} \end{bmatrix} $$

$$ \det {}^0J_g = -L_1 L_2 S_1 C_{12} - \cancel{L_2^2 S_{12} C_{12}} + L_1 L_2 S_{12} C_1 + \cancel{L_2^2 S_{12} C_{12}} = $$

$$ = L_1 L_2 (S_{12} C_1 - C_{12} S_1) = L_1 L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_1) = L_1 L_2 \sin\theta_2 $$

Esattamente lo stesso determinante.

Vediamo ora come a piccole velocità nello spazio operativo corrispondano grandi velocità nello spazio dei giunti.

$$ {}^0v_{3,0} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon \to 0 $$

$$ {}^0v_{3,0} = {}^0J_g(\bar{q}) \cdot \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = {}^0J_g^{-1}(\bar{q}) \cdot {}^0v_{3,0} $$ Calcolo l'inversa

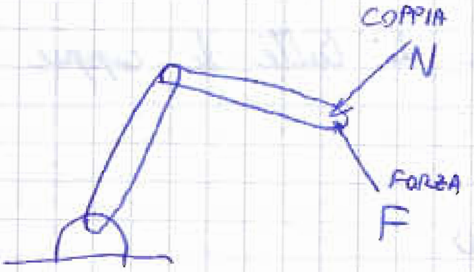
$$ \dot{q} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{L_1 L_2 \sin\theta_2} \begin{bmatrix} L_2 C_{12} & L_2 S_{12} \\ -L_1 C_1 - L_2 C_{12} & -L_1 S_1 - L_2 S_{12} \end{bmatrix}}_{\text{trasposta matrice minori}} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

$$ \dot{\theta}_1 = \varepsilon \cdot \frac{\cancel{L_2} C_{12}}{L_1 \cancel{L_2} S_2} $$

per $\theta_2 = 0$ o π, la velocità schizza all'infinito, perchè il seno va a 0 e il rapporto va a ∞.

$$ \dot{\theta}_2 = \frac{-L_1 C_1 - L_2 C_{12}}{L_1 L_2 S_2} $$

FORZE e COPPIE

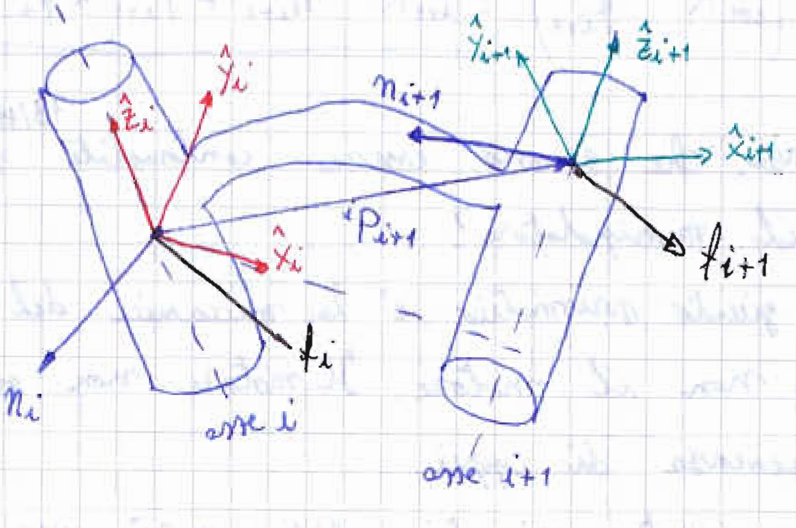


Voglio sapere le forze e le coppie presenti su tutti i giunti tali da mantenere fermo (in equilibrio) il manipolatore.

Consideriamo quindi il manipolatore dal punto di vista STATICO.

Dati $F_N, N_N \longrightarrow f_{N-1}, n_{N-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow f_1, n_1$

Cerco un algoritmo ricorsivo



f_{i+1} = forza che il braccio i esercita sul braccio i+1.

f_i = " " " i-1 " " i.

n_{i+1} = coppia che il braccio i esercita sul braccio i+1.

n_i = " " " " i-1 " " " i.

Per far stare in equilibrio il braccio, voglio che $\sum_k f_k = 0$

$${}^if_i - {}^if_{i+1} = 0$$

Principio azione-reazione → a me interessano le forze esercitate sul braccio i

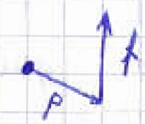
$$\boxed{{}^{i}f_i = {}^{i}f_{i+1} = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}}$$

conoscendo la forza $i+1$ posso calcolare quella i.

Tuttavia, deve essere 0 anche la somma di tutte le coppie perché l'oggetto sia immobile (non deve ruotare).

$$\sum_k n_k = 0 \qquad {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + {}^{i}p \times (-{}^{i}f_{i+1}) = 0$$

Anche le forze danno luogo a coppie:
Il punto scelto per valutare le coppie è ininfluente. Scelgo l'origine della terna i, così f_i mi dà coppia nulla.

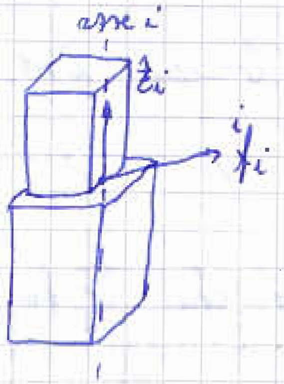


$n = p \times f$

$$\boxed{{}^{i}n_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}p_{i+1} \times \left({}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\right) = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}f_i}$$

18/11/09

Sono queste le coppie e le forze che devono essere contrastate per mantenere in equilibrio il manipolatore?
Se applico una coppia a un giunto prismatico è la meccanica del giunto che impedisce la rotazione, non il motore. Il motore non si accorge neanche della presenza di coppie.
Se applico una forza a un giunto prismatico, essa avrà una componente trasversale che si scarica sulla meccanica del giunto e una componente longitudinale scaricata sul motore.



GIUNTO PRISMATICO

$${}^{i}f_i \cdot {}^{i}\hat{Z}_i = {}^{i}f_i^{T}\,{}^{i}\hat{z}_i$$

prodotto scalare

prendo solo la componente lungo $\hat{z}$.

Nel caso di GIUNTO ROTOIDALE l'unica componente controllata dal motore è la componente z della coppia:

$${}^i n_i^T \, {}^i\hat{z}_i = {}^i n_i \cdot {}^i\hat{z}_i \qquad \text{GIUNTO ROTOIDALE}$$

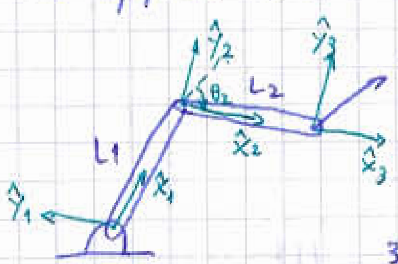
$${}^i f_i^T \, {}^i\hat{z}_i = {}^i f_i \cdot {}^i\hat{z}_i \qquad \text{GIUNTO PRISMATICO}$$

So che:

$${}^i f_i = {}^i_{i+1}R \, {}^{i+1}f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}^i_{i+1}R \, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i .$$

Le applico al solito manipolatore:



$${}^3 f_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^3 n_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Devo valutare le coppie. Applico l'algoritmo ricorsivo.

1) $${}^2 f_2 = {}^2_3R \cdot {}^3 f_3 = \underset{\substack{\| \\ \text{nessuna} \\ \text{rotazione}}}{Id} \cdot {}^3 f_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2 n_2 = {}^2_3R \, {}^3 n_3 + {}^2 P_3 \times {}^2 f_2 = 0 + \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_2 & 0 & 0 \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \cdot f_y \end{bmatrix}$$

2) $${}^1 f_1 = {}^1_2R \cdot {}^2 f_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x C_2 - f_y S_2 \\ f_x S_2 + f_y C_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1 n_1 = {}^1_2R \, {}^2 n_2 + {}^1 P_2 \times {}^1 f_1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x C_2 - f_y S_2 \\ f_x S_2 + f_y C_2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_Y \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_2 & 0 & 0 \\ f_X C_2 - f_Y S_2 & f_X S_2 + f_Y C_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 (f_X S_2 + f_Y C_2) \end{bmatrix}$$

Il motore dovrà bilanciare una coppia per ogni giunto

$$\tau_1 = L_2 f_Y + L_1 S_2 f_X + L_1 C_2 f_Y$$

$$\tau_2 = L_2 f_Y$$

Riscrivo le due equazioni in forma matriciale:

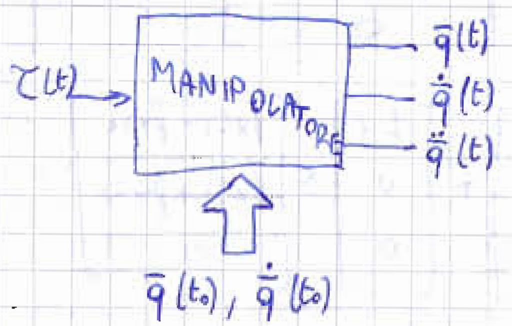
$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 S_2 & L_2 + L_1 C_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{\tau} = {}^3J_g^T(\bar{q})\, {}^3f_3} \qquad e \qquad \bar{\tau} = {}^0J_g^T(\bar{q}) \cdot {}^0f_3$$

Ho scoperto un altro uso dello Jacobiano geometrico!!!

DINAMICA DIRETTA e INVERSA

Il problema della dinamica DIRETTA è, dati i valori delle variabili di giunto, delle velocità di giunto (per l'istante t_0), delle coppie fornite ai motori per $t \in [t_0, T]$, trovare quanto valgono le variabili di giunto, le velocità di giunto e le accelerazioni per un generico istante t:



Il problema della dinamica INVERSA è trovare qual è la coppia che ha generato un certo moto, dati $\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), \ddot{\bar{q}}(t)$.

$$\boxed{\bar{F} = m \cdot \bar{a}}$$ LEGGE DI NEWTON

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{momento di} \\ \text{inerzia}}}{N = J} \cdot \ddot{\theta}$$ LEGGE DI EULERO

$J = m \cdot r^2$

$dJ = \rho\, dV \cdot r^2$

$\int dJ = \int \rho\, dV r^2$

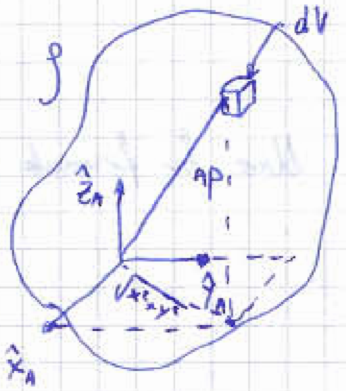
$$J \triangleq \int_V r^2 \rho\, dV.$$

L'estensione al caso vettoriale di $N = J \cdot \ddot{\theta}$ è molto complessa.

Considero la matrice TENSORE DI INERZIA così fatta:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Come si calcola? Considero un solido



$${}^{A}P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\rho\, dV \qquad I_{yy} = \int_V (x^2+z^2)\rho\, dV \qquad I_{zz} = \int_V \overbrace{(x^2+y^2)}^{\text{DISTANZA AL QUADRATO}} \overbrace{\rho\, dV}^{\text{MASSA INFINITESIMA}}$$

$$I_{xy} = \int_V xy\rho\, dV \qquad I_{xz} = \int_V xz\rho\, dV \qquad I_{yz} = \int_V yz\rho\, dV$$

$I_{zz} \rightarrow$ momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse $\hat{z}_A$.

$I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} \rightarrow$ PRODOTTI D'INERZIA

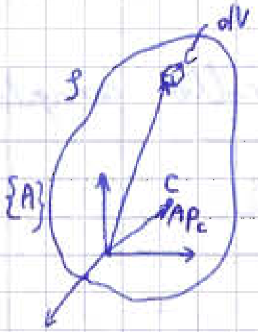
Il tensore d'inerzia dipende dalla scelta della terna fatta.

Arrivo alla seconda legge della dinamica di Eulero

$$\boxed{\bar{N} = {}^{C}I\,\alpha + \omega \times {}^{C}I\,\omega}$$ LEGGE DI EULERO

tensore del baricentro — accelerazione angolare — velocità angolare

BARICENTRO



$${}^{A}p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P_c \triangleq \frac{\int_V {}^{A}p\,\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{1}{m}\int_V \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rho\,dV = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

$$P_x = \frac{1}{m}\int_V x\,\rho\,dV \qquad P_y = \frac{1}{m}\int_V y\,\rho\,dV \qquad P_z = \frac{1}{m}\int_V z\,\rho\,dV.$$

ALGORITMO

1) Valutazione di tutte le velocità di giunto. Uso la formula già ricava

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$$

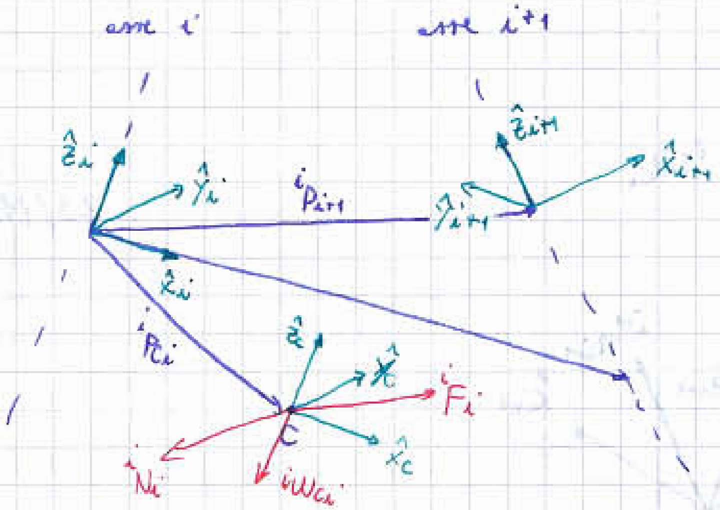
$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$$

2) Valutazione di tutte le accelerazioni di giunto.

$${}^{i+1}\alpha_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\alpha_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}a_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\alpha_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}a_i\right) + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$$

3) Calcolo velocità e accelerazioni del baricentro.



$\{C\} // \{i\}$

${}^{i}P_{i+1}$, ${}^{i}P_{c_i}$ note

$${}^{i}\omega_{c_i} = {}^{i}_{c_i}R \; {}^{c_i}\omega_{c_i} = \underset{\{c\}//\{i\}}{Id} \cdot {}^{c_i}\omega_{c_i}$$

Considero il baricentro come terna successiva e uso le relazioni già trovate.

$${}^{i}\omega_{c_i} = \underset{I_3}{{}^{c_i}_{i}R} \; {}^{i}\omega_i + 0 = {}^{i}\omega_i$$

Trovo ${}^{i}\alpha_{c_i}$ con gli stessi passaggi

$${}^{i}\alpha_{c_i} = \underset{I_3}{{}^{i}_{c_i}R} \; {}^{c_i}\alpha_{c_i} = {}^{c_i}\alpha_{c_i} \Rightarrow = \underset{I_3}{{}^{c_i}_{i}R} \; {}^{i}\alpha_i = {}^{i}\alpha_i$$

$${}^{i}a_{c_i} = {}^{i}_{c_i}R \; {}^{c_i}a_{c_i} = {}^{c_i}a_{c_i} \Rightarrow = {}^{c_i}_{i}R \left[{}^{i}\alpha_i \times {}^{i}P_{c_i} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{c_i}) + {}^{i}a_i \right]$$

Riassumendo

$${}^{i}\omega_{c_i} = {}^{i}\omega_i$$

$${}^{i}\alpha_{c_i} = {}^{i}\alpha_i$$

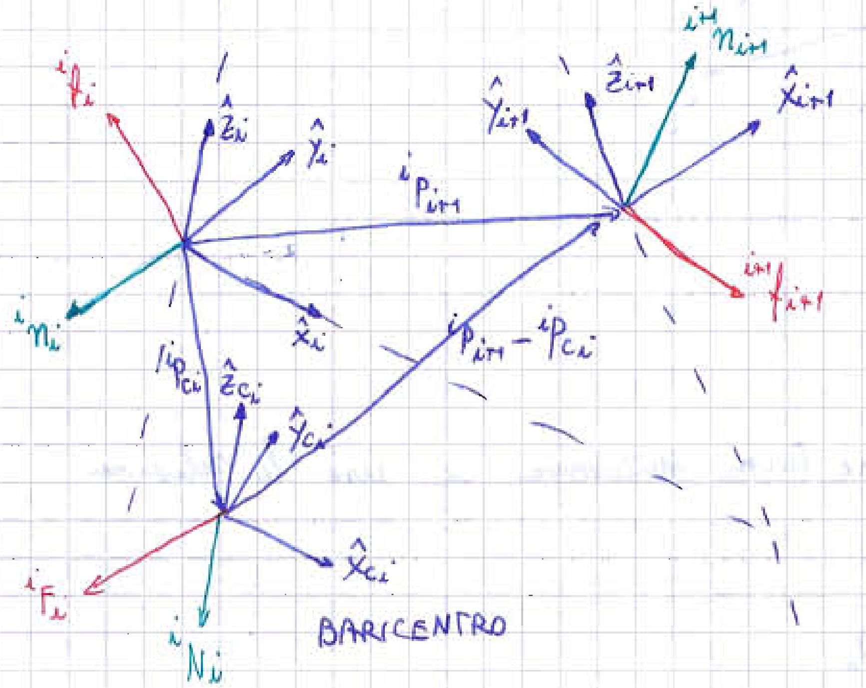
$${}^{i}a_{c_i} = {}^{i}a_i + {}^{i}\alpha_i \times {}^{i}P_{c_i} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{c_i})$$

4) Calcolo momenti e forze della terna i.

$${}^{i}F_i = m\,{}^{i}a_{c_i}$$

$${}^{i}N_i = {}^{c_i}I\,{}^{i}\alpha_{c_i} + {}^{i}\omega_{c_i} \times {}^{c_i}I\,{}^{i}\omega_{c_i}$$

23/11/09



5) $${}^{i}F_i = {}^{i}f_i - {}^{i}f_{i+1} = {}^{i}f_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \Rightarrow \boxed{{}^{i}f_i = {}^{i}F_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}}$$

$${}^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} - {}^{i}p_{c_i} \times {}^{i}f_i + ({}^{i}p_{i+1} - {}^{i}p_{c_i}) \times (-{}^{i}f_{i+1}) =$$

$$= {}^{i}n_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} - {}^{i}p_{c_i} \times {}^{i}f_i - {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1} + {}^{i}p_{c_i} \times {}^{i}f_{i+1} =$$

$$= {}^{i}n_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} - {}^{i}p_{c_i} \times \underbrace{\left({}^{i}f_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\right)}_{{}^{i}F_i} - {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$$

$$\boxed{{}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}p_{c_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}p_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}}$$

6) Estraggo solo forze e coppie che agiscono sul motore, ovvero quelle che agiscono lungo l'asse z.

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i n_i^T \; {}^i\hat{z}_i & \text{se rotoidale} \\ {}^i f_i^T \; {}^i\hat{z}_i & \text{se prismatico.} \end{cases}$$

In ${}^iF_i$ e ${}^iN_i$ (risultanti di forze e coppie) si nasconde anche la forza di gravità.

Possiamo anche esprimere forze e coppie in forma chiusa:

$$\bar{\tau} = \underbrace{M(\bar{q}) \cdot \ddot{\bar{q}}}_{\text{TERMINE INERZIALE}} + \underbrace{C(\bar{q}, \dot{\bar{q}})}_{\text{CONTRIBUTI DI FORZE CENTRIPETE E DI CORIOLIS}} + \underbrace{G(\bar{q})}_{\text{GRAVITÀ}}$$

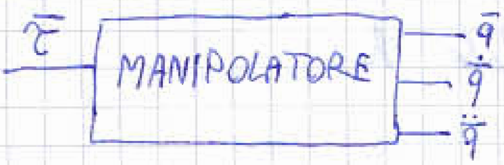
EQUAZIONE DEL MANIPOLATORE

$M(\bar{q}) \to$ matrice d'inerzia

CONTROLLO DEI MANIPOLATORI

$\bar{q}(t) \to$ variabili di giunto reali

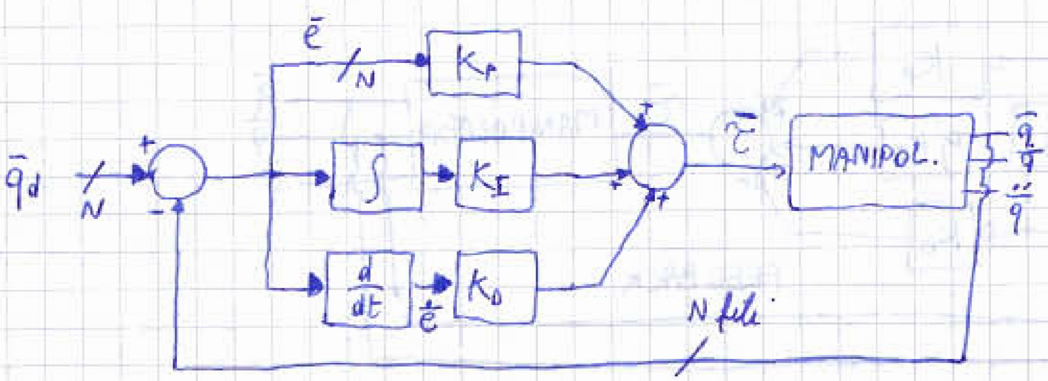
$\bar{q}_d(t) \to$ variabili di giunto desiderate.



il monte devo mettere il controllore: PID A GIUNTI INDIPENDENTI

↓

sono i regolatori (N) che sono indipendenti non i giunti che si muovono come gli pare



$\bar{e} \to$ errore di inseguimento

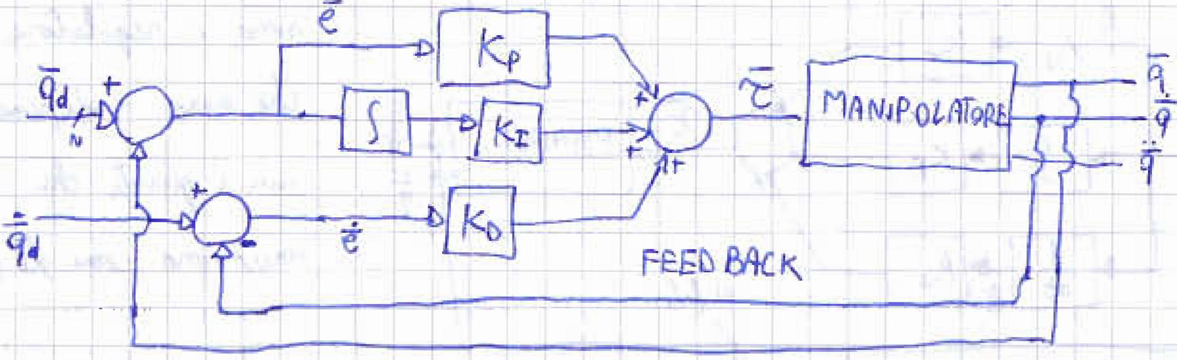
VANTAGGI

- Regolatore che si può tarare anche non sapendo niente del manipolatore, giocando sui parametri K_P, K_I, K_D. Anche perché le equazioni che stanno dietro al PID sono non lineari.

SVANTAGGI

- Le equazioni sono mutuamente accoppiabili, ovvero muovendo il giunto 1 si muove anche il giunto 2.
- Il regolatore è lineare mentre il manipolatore è non lineare, il che significa che le equazioni del manipolatore cambiano a seconda della posizione dei giunti; pertanto regolando il PID per una posizione questo non vale più per un'altra posizione.
- La derivata ha trasformata di Laplace S, ovvero è un sistema IMPROPRIO perché il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore, quindi non è realizzabile. Uso un approssimante proprio $\frac{Sa}{S+a}$. Oppure, dato che:

$$\bar{e} = \bar{q}_d - \bar{q} \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \boxed{\dot{\bar{e}} = \dot{\bar{q}}_d - \dot{\bar{q}}}$$ Calcolo la derivata così:



Questo è il circuito REALE.

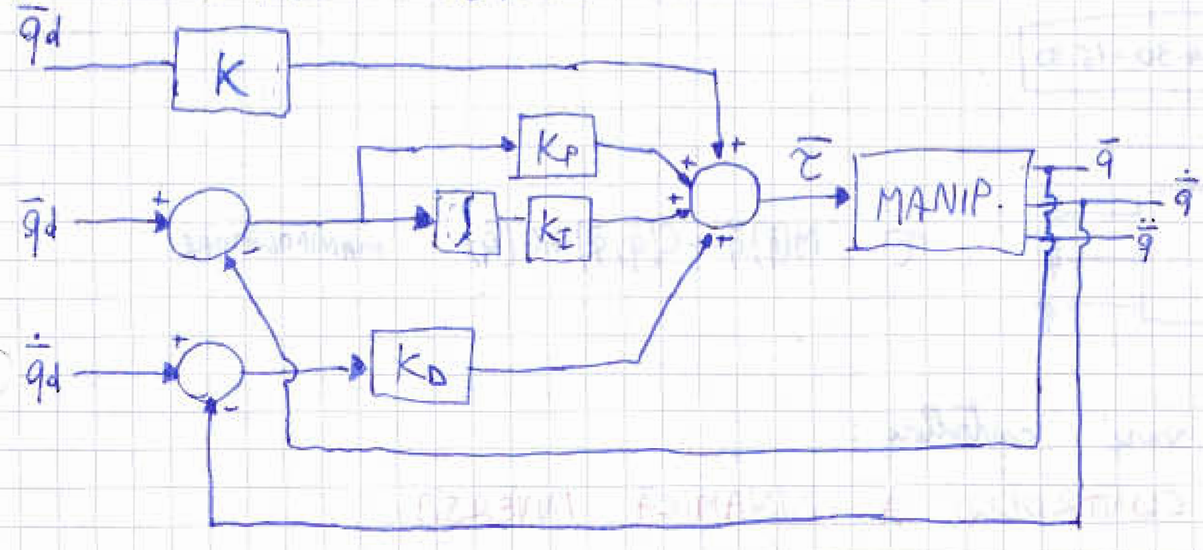
$$\bar{\tau} = K_P \bar{e} + K_I \int_0^t \bar{e}(\tau)\, d\tau + K_D \dot{\bar{e}}$$ con K_P, K_I, K_D matrici diagonali

Se c'è un errore, il PID chiede più coppia per eliminarlo. Posso migliorarlo cercando di prevenire l'errore (FEED FORWARD).
Per implementarlo, trovo il $\bar{\tau}$ desiderato per far fare al manipolatore esattamente quello che voglio io risolvendo l'equazione del manipolatore nelle variabili di giunto desiderate:

$$\bar{\tau}_d = M(\bar{q}_d)\ddot{\bar{q}}_d + C(\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d) + G(\bar{q}_d).$$

In realtà, non sempre sono disponibili tutte le informazioni sul manipolatore, ma solo una parte, ad esempio $\bar{\tau} = M(\bar{q})\ddot{\bar{q}}$.
Lascio quindi il FEEDBACK per colmare questa mancanza di informazioni.

PID A GIUNTI INDIPENDENTI CON AZIONE DI FEEDFORWARD

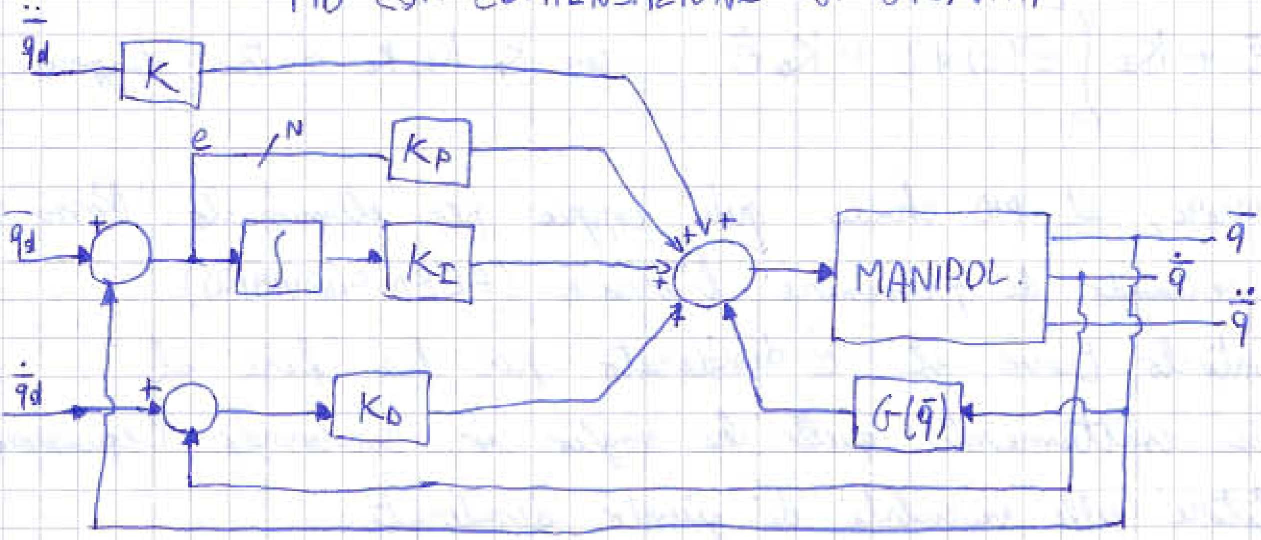


Metto K al posto di $M(\bar{q})$ perché non sempre la conosco. Approssimo.

$$\bar{\tau} = K_P \bar{e} + K_I \int_0^t \bar{e}(\tau)\, d\tau + K_D \dot{\bar{e}} + K \ddot{\bar{q}}_d$$

Questo controllore è più preciso perché previene gli errori.
Ma posso ancora migliorarlo, considerando e sfruttando la conoscenza di $G(\bar{q})$, che di solito è semplice da valutare.

PID CON COMPENSAZIONE DI GRAVITÀ



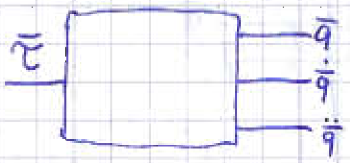
$$\bar{\tau} = K_P \bar{e} + K_I \int_0^t \bar{e}(\tau)\, d\tau + K_D \dot{\bar{e}} + K \ddot{\bar{q}}_d + G(\bar{q})$$

$$G(\bar{q}) = \begin{bmatrix} G_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ G_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \vdots \\ G_n(\quad) \end{bmatrix}$$

<u>Non è più a giunti indipendenti</u>

25/11/09

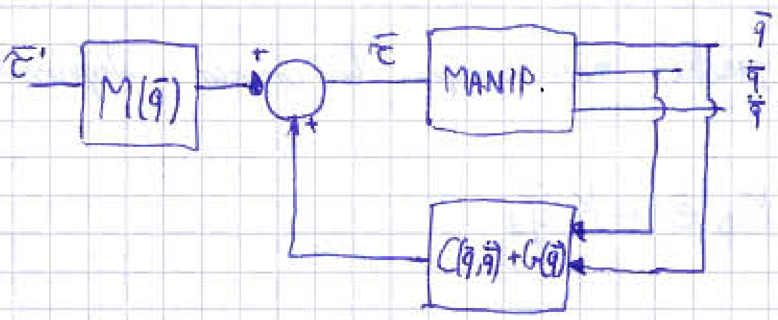
$\boxed{\text{26/11 LAB 14.30-16.30}}$



$$\tau = M(\bar{q})\ddot{q} + C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q})$$ MANIPOLATORE

Vediamo ora vari controllori:

CONTROLLO A DINAMICA INVERSA



$$\tau = M(\bar{q})\tau' + C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q})$$ CONTROLLORE

Eguaglio le due equazioni

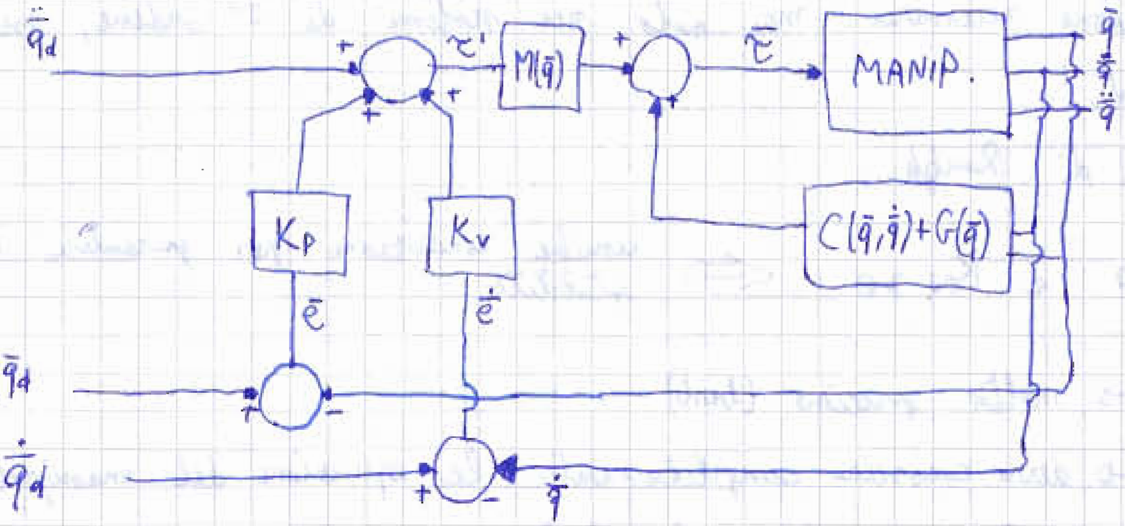
$$M(\bar q)\ddot{\bar q} + \cancel{C(\bar q,\dot{\bar q})} + \cancel{G(\bar q)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre definita positiva } (Re(aut)>0)\text{, quindi è invertibile}}}{M(\bar q)}\,\tau' + \cancel{C(\bar q,\dot{\bar q})} + \cancel{G(\bar q)}$$

$$\underbrace{M^{-1}(\bar q)M(\bar q)}_{Id}\ddot{\bar q} = \underbrace{M^{-1}(\bar q)M(\bar q)}_{Id}\tau' \Longrightarrow \boxed{\ddot{\bar q} = \tau'}$$

Il legame tra il nuovo ingresso $\bar\tau'$ e le uscite è diventato perfettamente lineare. Quindi, cambiando τ_i si modifica solo $\ddot q_i$ => DISACCOPPIAMENTO

$\tau' = \ddot{\bar q}_d + K_v\dot{\bar e} + K_p\bar e$ annulla l'errore di inseguimento.

SISTEMA COMPLESSIVO



$$\begin{cases} \tau' = \ddot{\bar q} \\ \tau' = \ddot{\bar q}_d + K_v\dot{\bar e} + K_p\bar e \end{cases} \Rightarrow \ddot{\bar q} = \ddot{\bar q}_d + K_v\dot{\bar e} + K_p\bar e \Rightarrow \underbrace{\ddot{\bar q}_d - \ddot{\bar q}}_{\ddot{\bar e}} + K_v\dot{\bar e} + K_p\bar e = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar e} + K_v\dot{\bar e} + K_p\bar e = 0$$

K_p e K_v sono le stesse matrici diagonali viste in precedenza. Pertanto le equazioni sono tutte disaccoppiate:

$$\ddot e_i + K_{v_i}\dot e_i + K_{p_i}e_i = 0$$

Ogni equazione e gli errori che compaiono riguardano solamente quel giunto

L'errore a regime tende a 0? Guardo la trasformata di Laplace.

$$s^2 E_i(s) - s e_i(0) - \dot{e}_i(0) + K_{v_i}\left[s E_i(s) - e_i(0)\right] + K_{p_i} E_i(s) = 0$$

$$E_i(s)\left[s^2 + K_{v_i} s + K_{p_i}\right] = \dot{e}_i(0) + e_i(0)\left[s + K_{v_i}\right]$$

$$E_i(s) = \frac{\dot{e}_i(0) + e_i(0)\cdot\left[K_{v_i} + s\right]}{s^2 + K_{v_i} s + K_{p_i}}$$ TRASFORMATA DI LAPLACE DELL'ERRORE

Studio la stabilità: se i modi del sistema sono asintoticamente stabili, ...

Uso il CRITERIO DI ROUGH:

1) Verifico che i segni del denominatore siano tutti dello stesso segno. Condizione necessaria ma, solo per sistemi di 2° ordine, anche sufficiente!
2) Tabella di Rough...

$K_{v_i} > 0$ e $K_{p_i} > 0$ $\Leftarrow$ uniche condizioni per garantire la stabilità.

VANTAGGI $\rightarrow$ molto preciso (best)

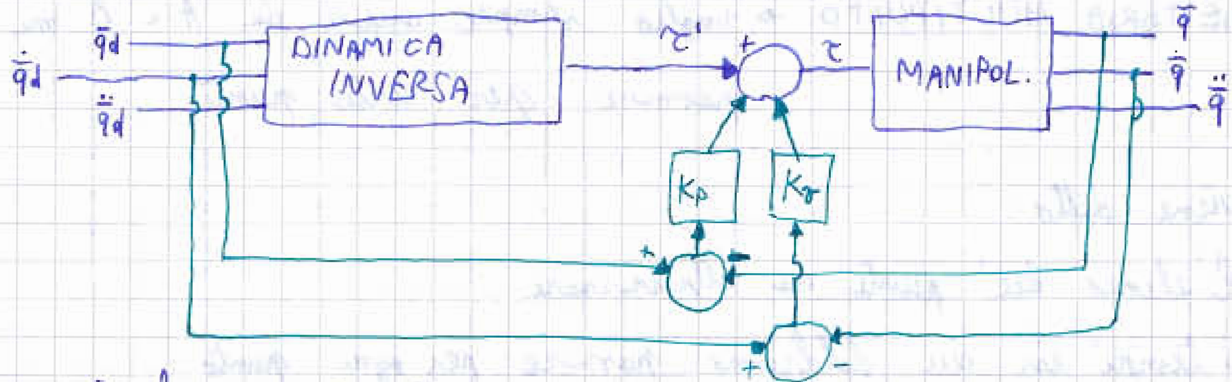
SVANTAGGI $\rightarrow$ devo conoscere completamente le equazioni del manipolatore, matrici complesse da calcolare in ogni istante

CONTROLLO A COPPIA PRECALCOLATA

Evita il calcolo in linea della dinamica inversa del manipolatore, a scapito di un lieve peggioramento della precisione:

$$\bar{\tau} = M(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + G(\bar{q})$$ MANIPOLATORE

$$\bar{\tau}' = M(\bar{q}_d)\ddot{\bar{q}}_d + C(\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d) + G(\bar{q}_d)$$



Il problema è che non conosco precisamente le equazioni del manipolatore a causa del ritardo, per cui $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}$ saranno diverse da quelle imposte $\Rightarrow$ AGGIUNGO IL FEEDBACK!

VANTAGGI $\rightarrow$ i calcoli "pesanti" li posso fare fuori linea

SVANTAGGI $\rightarrow$ le equazioni non sono più disaccoppiate e lineari e, quindi, agendo su un giunto si hanno minime ripercussioni anche sugli altri.

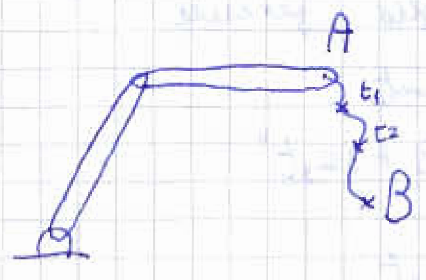
$$\begin{cases} \tau' = M(\bar{q}_d)\,\ddot{\bar{q}}_d + C(\bar{q}_d, \dot{\bar{q}}_d) + G(\bar{q}_d) \\ \tau = \tau' + K_p\,\bar{e} + K_v\,\dot{\bar{e}} \end{cases} \quad \text{CONTROLLORE}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{non diagonale}}}{M(\bar{q})}\,\ddot{\bar{e}} + K_v\,\dot{\bar{e}} + K_p\,\bar{e} = 0$$

PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIE

$\bar{q}_d(t)$ = SET POINT

Voglio portare il manipolatore dal punto A al punto B (TRAIETTORIA PUNTO-PUNTO)



TRAIETTORIA MULTIPUNTO $\rightarrow$ voglio sempre andare da A a B ma devo passare per certi punti.

Ci viene detto:

- l'elenco dei punti da attraversare
- i tempi in cui dobbiamo passare per ogni punto.

La pianificazione si può fare

- nello spazio dei giunti (più facile)
- nello spazio operativo

La traiettoria deve essere più morbida possibile, senza "cuspidi" che accorciano la vita del manipolatore e rendono difficile il lavoro del controllore.

PIANIFICAZIONE PUNTO-PUNTO MEDIANTE SPLAIN CUBICHE

$$ {}^{B}_{T}T(0) \longrightarrow {}^{B}_{T}T(t_f) $$

cinematica inversa

$$ \bar{q}_0 = \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ q_{0N} \end{bmatrix} \xrightarrow{t_f} \bar{q}_f = \begin{bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ \vdots \\ q_{fN} \end{bmatrix} $$

Faccio una pianificazione per ogni giunto

$q_d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ SPLAIN CUBICA (polinomio di 3° grado)

$\uparrow$ traiettoria che voglio generare

$\downarrow$ conosco le derivate

$$\dot{q}_d(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot{q}_d(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

$$\begin{cases} q_d(0) = q_0 \leftarrow \text{uno di questi} \\ q_d(t_f) = q_f \leftarrow \text{uno di questi} \\ \dot{q}_d(0) = 0 \quad \text{parto da fermo} \\ \dot{q}_d(t_f) = 0 \quad \text{arrivo fermo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = q_0 & \leftarrow \text{già trovato!} \\ a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = q_f \\ a_1 = 0 & \leftarrow \text{già trovato!} \\ a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = 0 \end{cases}$$

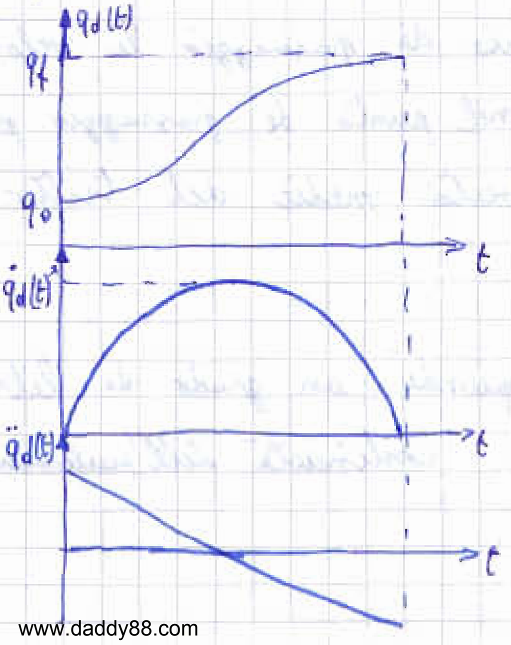
$$\rightarrow \begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = 0 \\ q_f - q_0 = a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 = 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -\dfrac{3a_3 t_f^{\cancel{2}}}{2\cancel{t_f}} \\ q_f - q_0 = -\dfrac{3}{2} a_3 t_f^3 + a_3 t_f^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{2(q_0 - q_f)}{t_f^3} \\ a_2 = -\dfrac{3}{\cancel{2}} t_f \cdot \dfrac{\cancel{2}(q_0 - q_f)}{t_f^3} = -\dfrac{3(q_0 - q_f)}{t_f^2} \end{cases}$$

Riepilogando:

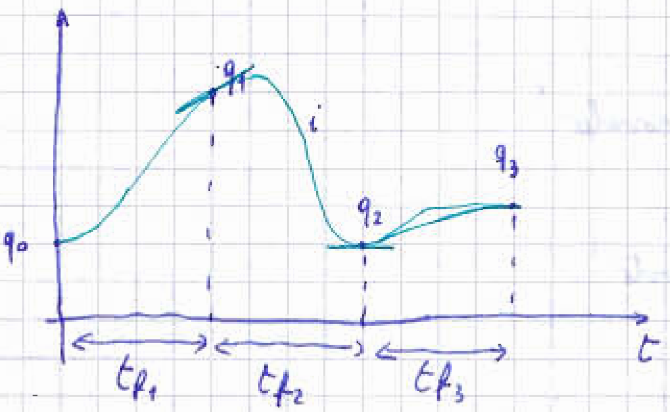
$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3(q_f - q_0)}{t_f^2} \\ a_3 &= -\frac{2(q_0 - q_f)}{t_f^3} \end{aligned}}$$

Ho pianificato la mia traiettoria.



Spesso si chiede di calcolare l'istante di tempo in cui la velocità è massima.

TRAIETTORIE MULTIPUNTO



Mi ricordo che devo fare traiettorie dolci. Per farlo, impongo che la velocità di arrivo in un punto sia uguale alla velocità di partenza da quel punto per andare verso il successivo.

$$\begin{cases} q_d(0) = q_i \\ q_d(t_{f,i+1}) = q_{i+1} \\ \dot{q}_d(0) = \dot{q}_i \\ \dot{q}_d(t_{f,i+1}) = \dot{q}_{i+1} \end{cases}$$

servono quindi anche le velocità di passaggio

Come le calcolo? Ci sono vari metodi:

1) L'utente ci dà la velocità che vuole nello spazio operativo ($\bar{v} = J_g(\bar{q})\dot{\bar{q}}$) →

$$\boxed{\dot{\bar{q}} = J_g^{-1}(\bar{q})\,\bar{v}}$$

2) Se c'è un'inversione di velocità, nel punto di passaggio la velocità la prendo nulla. Se non c'è inversione, nel punto di passaggio prendo come velocità la media delle due velocità medie del tratto precedente e successivo.

3) Non impongo velocità di passaggio; ho quindi un grado di libertà in più che mi gioco imponendo la continuità dell'accelerazione che mi dà curve ancora più dolci.

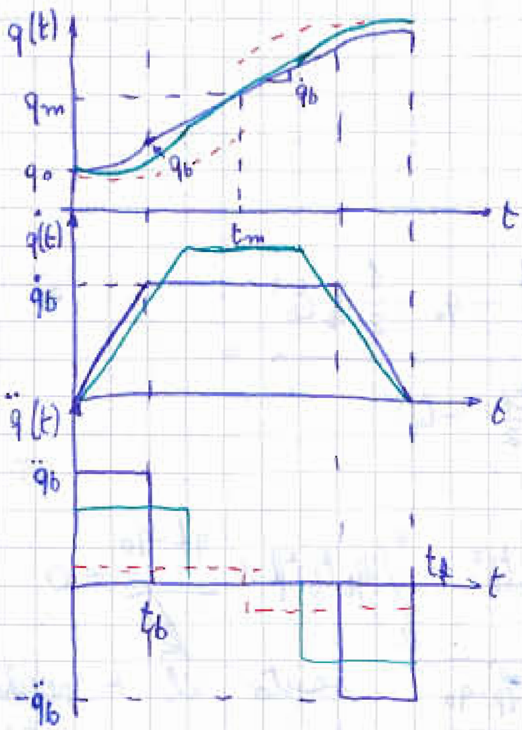
ESEMPIO: $\vartheta_0 \xrightarrow{t_{F1}} \vartheta_v \xrightarrow{t_{F2}} \vartheta_f$ devo pianificare la traiettoria

$$\vartheta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$
$$\vartheta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

8 incognite $\Rightarrow$ 8 equazioni

$$\begin{cases} \vartheta_1(0) = a_{10} = \vartheta_0 \\ \vartheta_1(t_{F1}) = \vartheta_v \\ \vartheta_2(0) = \vartheta_v \quad \text{il tempo si riazzera ad ogni passaggio da un punto di passaggio} \\ \vartheta_2(t_{F2}) = \vartheta_f \\ \dot\vartheta_1(0) = 0 \\ \dot\vartheta_2(t_{f2}) = 0 \quad \text{velocità finale nulla} \\ \dot\vartheta_1(t_{f1}) = \dot\vartheta_2(0) \quad \text{impongo continuità velocità} \\ \ddot\vartheta_1(t_{f1}) = \ddot\vartheta_2(0) \quad \text{impongo continuità nell'accelerazione} \end{cases}$$

TRAIETTORIE LINEARI - QUADRATICHE



altro caso

Integrale della velocità.

$\Uparrow$

Integrale dell'accelerazione

$\Uparrow$

Impongo l'accelerazione

le parabole non si intersecano più.

1) $0 \le t \le t_b$

$$\ddot q(t) = \ddot q_b$$
$$\dot q(t) = \cancel{\dot q_0} + \int_0^t \ddot q(\tau)\,d\tau = \ddot q_b \cdot t$$
$$q(t) = q_0 + \int_0^t \dot q(\tau)\,d\tau = q_0 + \ddot q_b \cdot \frac{t^2}{2}$$

2) $t_b \le t \le t_f - t_b$:

$$\ddot{q}(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_b + \int_{t_b}^{t} \cancelto{0}{\ddot{q}(\tau)}\, d\tau = \dot{q}_b$$

$$q(t) = q_b + \int_{t_b}^{t} \dot{q}(\tau)\, d\tau = q_b + \dot{q}_b(t - t_b) \overset{\text{da (1)}}{=} q_0 + \frac{1}{2}\ddot{q}_b t_b^2 + \ddot{q}_b t_b (t - t_b) =$$

$$= q_0 - \frac{1}{2}\ddot{q}_b t_b^2 + \ddot{q}_b t t_b$$

3) $t_f - t_b \le t \le t_f$:

$$\ddot{q}(t) = -\ddot{q}_b$$

$$\dot{q}(t) = -\ddot{q}_b (t - t_f)$$

$$q(t) = q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_b (t - t_f)^2$$

Si ricavano dagli integrali simili a prima o guardando le equazioni viste prima

q_0, q_f, t_f sono noti (dati del problema). Mi mancano $\ddot{q}_b$, t_b e $\dot{q}_b$.
Uno di questi lo devo fissare (di solito l'accelerazione) e gli altri due li trovo automaticamente: $\ddot{q}_b t_b = \dot{q}_b$

$q_m \rightarrow$ metà traiettoria

$$\begin{cases} t_m = \dfrac{t_f}{2} & \text{essendo la traiettoria simmetrica} \\ q_m = \dfrac{q_f + q_0}{2} \end{cases}$$

$$\dot{q}_b = \frac{q_m - q_b}{t_m - t_b} \Longrightarrow \ddot{q}_b t_b = \frac{q_m - \overset{\text{fine tratto parabolico}}{q_b}}{t_m - t_b} = \frac{\frac{q_0 + q_f}{2} - q_0 - \frac{1}{2}\ddot{q}_b t_b^2}{\frac{t_f}{2} - t_b} =$$

$$\ddot{q}_b t_b \frac{t_f}{2} - \ddot{q}_b t_b^2 = \frac{q_f}{2} - \frac{q_0}{2} - \frac{1}{2}\ddot{q}_b t_b^2 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\ddot{q}_b t_b^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\ddot{q}_b t_b t_f + \frac{q_f - q_0}{\cancel{2}} = 0$$

$$t_b = \frac{\ddot{q}_b t_f \pm \sqrt{\ddot{q}_b^2 t_f^2 - 4\ddot{q}_b (q_f - q_0)}}{2\ddot{q}_b} = \frac{t_f}{2} \pm \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_f - q_0}{\ddot{q}_b}}$$

scarto il + perché t_b sicuramente $< \frac{t_f}{2}$

$$t_b = \frac{t_f}{2} - \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_f - q_0}{\ddot{q}_b}}$$

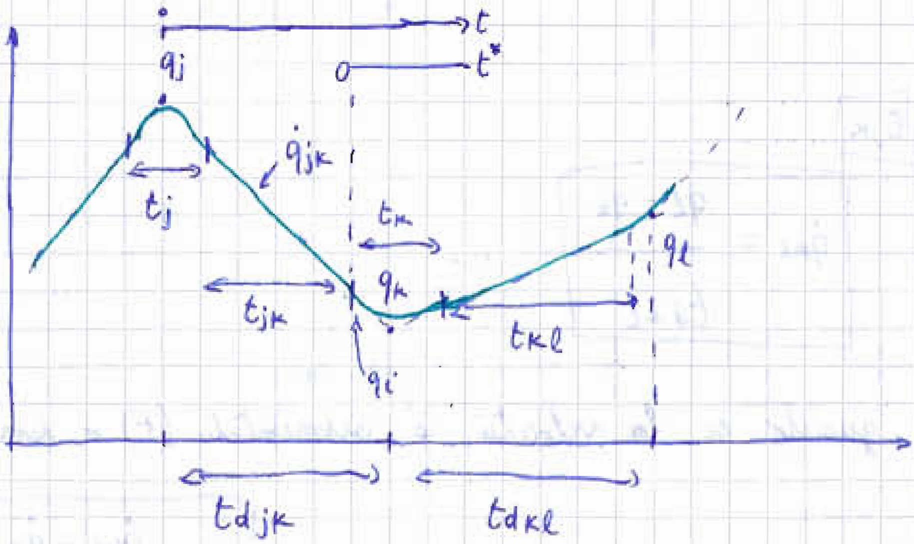
$\text{fisso } \ddot{q}_b \rightarrow$ calcolo $t_b \rightarrow$ calcolo $\dot{q}_b = \ddot{q}_b t_b$.

La soluzione del problema esiste se $\Delta \geq 0$, ovvero che:

$$\frac{t_f^2}{4} - \frac{q_f - q_0}{\ddot{q}_b} \geq 0 \qquad \frac{t_f^2}{4} \geq \frac{q_f - q_0}{\ddot{q}_b} \qquad \boxed{\ddot{q}_b \geq 4\,\frac{q_f - q_0}{t_f^2}}$$

devo sceglierlo piccolo per evitare sollecitazioni ma non troppo.

PIANIFICAZIONE MULTIPUNTO LINEARE-QUADRATICA



In questo caso NON PASSO per q_j, q_k, q_l seppure mi ci avvicini molto. Sono noti $|\ddot{q}_j|$, $|\ddot{q}_k|$ e $|\ddot{q}_l|$, il resto è incognito.

1) $\frac{t_j}{2} \leq t \leq \frac{t_j}{2} + t_{jk}$ tratto rettilineo

$$\ddot{q}(t) = 0$$
$$\dot{q}(t) = \dot{q}_{jk}$$
$$q(t) = q_j + \int_0^t \dot{q}(\tau)\,d\tau = q_j + \dot{q}_{jk} t$$

2) $\boxed{t^* = t - \frac{t_j}{2} - t_{jk}}$ $\qquad \frac{t_j}{2} + t_{jk} \leq t \leq t_{djk} + \frac{t_k}{2}$ tratto parabolico

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_k \quad \text{costante}$$
$$\dot{q}(t) = \dot{q}_{jk} + \int_0^{t^*} \ddot{q}(\tau)\,d\tau = \dot{q}_{jk} + \ddot{q}_k t^*$$
$$q(t) = q_i + \int_0^{t^*} \dot{q}(\tau)\,d\tau = q_i + \int_0^{t^*} (\dot{q}_{jk} + \ddot{q}_k \tau)\,d\tau = q_i + \dot{q}_{jk} t^* + \frac{1}{2}\ddot{q}_k t^{*2}$$

$$q_i = q_j + \dot{q}_{jk} \cdot t = q_j + \dot{q}_{jk}\left(\frac{t}{2}j + t_{jk}\right)$$

$$q(t) = q_j + \dot{q}_{jk}\left(\cancel{\frac{t}{2}j} + \cancel{t_{jk}}\right) + \dot{q}_{jk}\left(t - \cancel{\frac{t}{2}j} - \cancel{t_{jk}}\right) + \frac{1}{2}\ddot{q}_k\left(t - \frac{t}{2}j - t_{jk}\right)^2$$

$$\begin{cases} q(t) = q_j + \dot{q}_{jk} t + \frac{1}{2}\left(t - \frac{t}{2}j - t_{jk}\right)^2 \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_{jk} + \ddot{q}_k\left(t - \frac{t_j}{2} - t_{jk}\right) \\ \ddot{q}(t) = \ddot{q}_k \end{cases}$$

Non conosco $\boxed{\ddot{q}_k}$, $\boxed{\dot{q}_{jk}}$, $\boxed{t_j}$, $\boxed{t_{jk}}$

$$\dot{q}_{jk} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_k - q_j}{t_{djk}} \qquad \boxed{\dot{q}_{kl} = \frac{q_l - q_k}{t_{d\,kl}}} \quad \dots$$

$\boxed{\ddot{q}_k = |\ddot{q}_k|\, sgn(\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk})}$ guardo se la velocità è aumentata (+) o diminuita (-)

Alla fine del tratto parabolico avrò: $\dot{q}_{kl} = \dot{q}_{jk} + \ddot{q}_k t_k \Rightarrow \boxed{t_k = \frac{\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk}}{\ddot{q}_k}}$ stesso modo per t_j

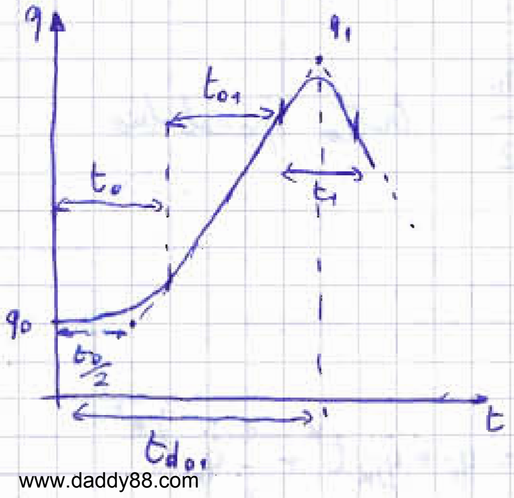
t^* alla fine

$$\boxed{t_{jk} = t_{djk} - \frac{t_j}{2} - \frac{t_k}{2}}$$

Non resta ora che fare i calcoli per il primo e l'ultimo punto.

2/12/09

Per quanto riguarda il primo punto, fisso un punto distante t_0 da q_0.



1) $\ddot{q}(t) = \ddot{q}_0$

$\dot{q}(t) = \ddot{q}_0 t$

$q(t) = q_0 + \frac{1}{2}\ddot{q}_0 t^2$

Conosco $q_0, q_1, t_{d01}, |\ddot{q}_0|$ per $t \in [0, t_0]$

$\ddot{q}_0 = |\ddot{q}_0| \cdot \text{sign}(q_1 - q_0)$ perché sono fermo e se voglio arrivare a q_1 devo accelerare.

$$\dot{q}_{01} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_1 - q_0}{t_{d01} - \frac{t_0}{2}} = \ddot{q}_0 t_0 \Rightarrow q_1 - q_0 = \ddot{q}_0 t_{d01} t_0 - \frac{1}{2}\ddot{q}_0 t_0^2$$

$$\ddot{q}_0 t_0^2 - 2\ddot{q}_0 t_{d01} t_0 + 2(q_1 - q_0)$$

$$t_0 = \frac{\ddot{q}_0 t_{d01} \pm \sqrt{\ddot{q}_0^2 t_{d01}^2 - 2\ddot{q}_0^2 (q_1 - q_0)}}{\ddot{q}_0} = t_{d01} \pm \sqrt{t_{d01}^2 - \frac{2(q_1 - q_0)}{\ddot{q}_0}}$$

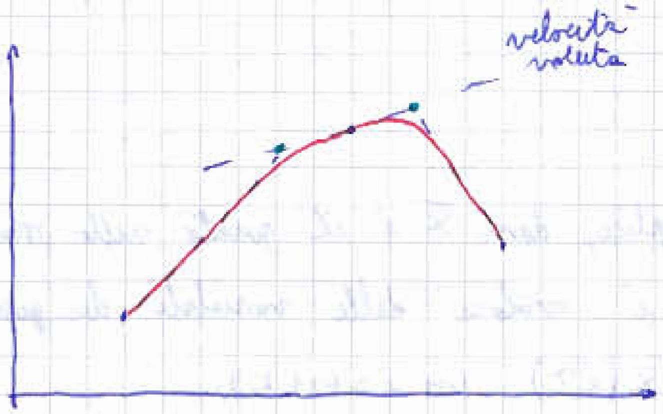
Essendo $t_0 < t_{d01}$ come si vede dalla figura il + lo posso scartare

$$\boxed{t_0 = t_{d01} - \sqrt{t_{d01}^2 - \frac{2(q_1 - q_0)}{\ddot{q}_0}}} \qquad \boxed{\dot{q}_{01} = \ddot{q}_0 t_0}$$

$$\boxed{t_{01} = t_{d01} - t_0 - \frac{t_1}{2}} \qquad t_1 = \frac{\Delta V}{\Delta a} \text{ come l'altra volta.}$$

Per il punto finale il ragionamento è lo stesso.

- Il difetto di queste traiettorie è che non passo per i punti di via, ma ci sono alcune situazioni in cui questo non mi va bene.

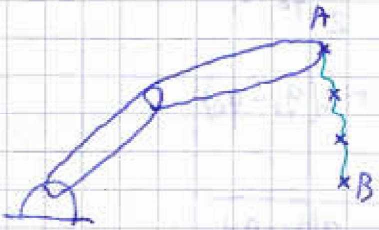


aggiungo due punti ausiliari e poi procedo come fino ad ora

passo per il punto voluto e non per quelli ausiliari

PIANIFICAZIONE NELLO SPAZIO OPERATIVO

Nello spazio dei giunti ho il punto iniziale, quello finale e qualche punto di via. Con la cinematica inversa ricavo i corrispondenti punti nello spazio dei giunti e pianifico giunto per giunto.



Quando il robot si muoverà, mi viene assicurato il passaggio o la vicinanza per i punti, ma in mezzo non so cosa fare.

Nei casi in cui è importante la forma della traiettoria, devo pianificare direttamente nello spazio operativo, ma è più complesso.

L'utente mi assegna ${}^{B}_{T}T(0)$ e ${}^{B}_{T}T(t_f)$. Voglio sapere ${}^{B}_{T}T(t)$ per $t \in [0, t_f]$

Quello che si fa operativamente è passare da ${}^{B}_{T}T(0)$ e ${}^{B}_{T}T(t_f)$ alle informazioni nello spazio operativo.

B → Base Frame

T → Tool Frame

$${}^{B}_{T}T(0) \quad\quad {}^{B}_{T}T(t_f)$$

$$\downarrow \quad\quad\quad \downarrow$$

$$\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \hline \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} \quad\quad \bar{X}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \\ \hline \alpha_f \\ \beta_f \\ \gamma_f \end{bmatrix}$$

Mi calcolo $\bar{X}(t)$ che è più semplice, dove $\bar{X}$ è il punto nello spazio operativo. Ma a me servono i valori delle variabili di giunto!

Allora DISCRETIZZO: calcolo $\bar{X}(i\tau)$ con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

e τ = TEMPO DI CAMPIONAMENTO (tipicamente 1 ms)

Poi, traduco $\bar{x}(i\tau)$ in $\bar{q}_d(i\tau)$, cioè punti nello spazio dei giunti, risolvendo il problema di cinematica inversa. E qui sta il problema computazionale! Devo fare migliaia di conversioni (1 ogni ms). Inoltre, per i controllori mi serve sapere anche $\dot{\bar{q}}_d(i\tau)$ e $\ddot{\bar{q}}_d(i\tau)$, ma per come ho ricavato $\bar{q}_d(i\tau)$ non ho una funzione analitica da derivare. Devo quindi dedurre l'equazione della velocità, stimandola con il rapporto incrementale:

$$\dot{\bar{q}}_d = \frac{\bar{q}_d(i\tau) - \bar{q}_d[(i-1)\tau]}{\tau}$$

Il problema è che, a causa del rumore, il segnale oscillerà e questo dà fastidio al controllore.
Lo stesso vale per l'accelerazione, che sarà ancora più rumorosa approssimando un segnale già approssimato!

$$\ddot{\bar{q}}_d = \frac{\dot{\bar{q}}_d(i\tau) - \dot{\bar{q}}_d[(i-1)\tau]}{\tau}$$

Posso evitare le approssimazioni calcolando i valori precisi di $\dot{\bar{q}}_d$ (velocità), ma devo fare molti più calcoli. Essendo $\bar{x}(t)$ una equazione matematica nota la posso derivare:

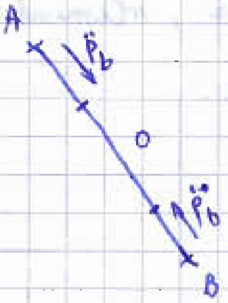
$$\begin{array}{l} \bar{x}(t) \longrightarrow \bar{x}(i\tau) \longrightarrow \bar{q}_d(i\tau) \longrightarrow \dot{q}_d,\ \ddot{q}_d \ \text{approssimati} \\ \downarrow \\ \dot{\bar{x}}(t) \longrightarrow \dot{\bar{x}}(i\tau) \longrightarrow \dot{\bar{q}}_d = \underbrace{J_a^{-1}}_{\text{Jacobiano analitico}}(\bar{q})\, \dot{\bar{x}} \longrightarrow \ddot{\bar{q}}_d = \dfrac{\dot{\bar{q}}_d(i\tau) - \dot{\bar{q}}_d[(i-1)\tau]}{\tau} \end{array}$$

lungo da calcolare

Rimane un problema: come calcolare $\bar{x}(t)$.
Ci sono vari modi, noi vediamo alcuni casi particolari:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}$$ divido in due parti: coordinate direzione (x, y, z) / coordinate orientamento (α, β, γ)

1° CASO → traiettoria rettilinea



Uso la pianificazione lineare quadratica. Come al solito divido il movimento in 3 parti

1) accelerazione $= \ddot{P}_b$
2) accelerazione nulla
3) accelerazione $= -\ddot{P}_b$

Il "problema" è che questa volta pianifico tutte le componenti assieme: PIANIFICAZIONE VETTORIALE.

1) $\ddot{\bar{P}}(t) = \ddot{\bar{P}}_b$

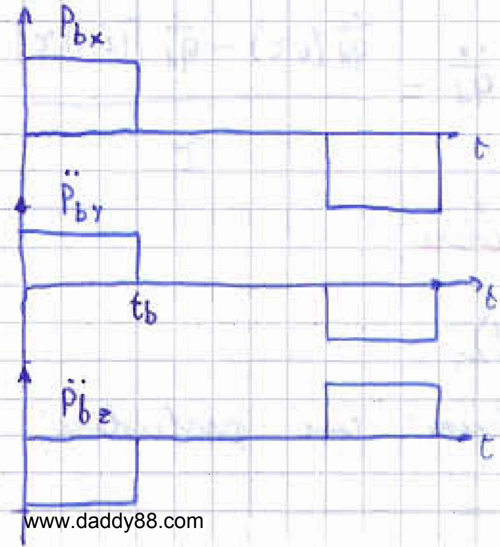
Come prima

$\dot{\bar{P}}(t) = \ddot{\bar{P}}_b \cdot t$

$$\bar{P}(t) = \bar{P}_A + \frac{1}{2}\ddot{\bar{P}}_b t^2 = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \ddot{P}_{bx} \\ \ddot{P}_{by} \\ \ddot{P}_{bz} \end{bmatrix} t^2$$

Come vincolo ho la direzione dell'accelerazione imposta $\ddot{\bar{P}}_b$, che deve essere da A verso B.

Stesse equazioni per 2) e 3).

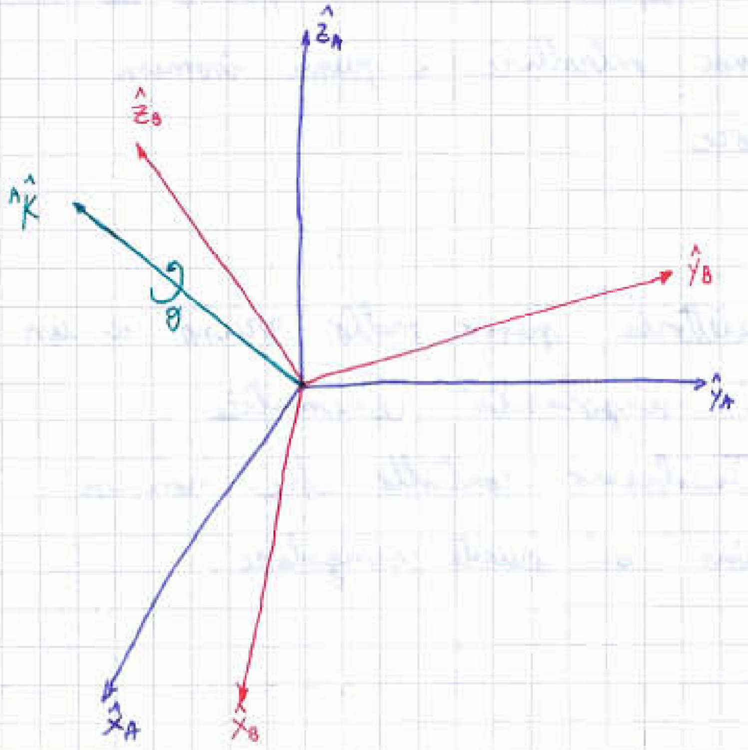


Se invece di scegliere $\ddot{\bar{P}}_b$ scegliessi la durata effettiva del tratto iniziale t_b

$t_b \rightarrow \ddot{\bar{P}}_b, \dot{\bar{P}}_b$

Faccio la pianificazione scalare per le tre componenti e ottengo un vettore diretto proprio da A a B.

2° CASO → pianifico la traiettoria



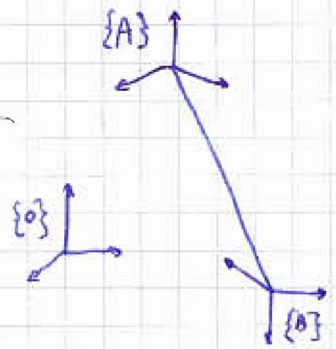
$${}^A K = \theta \, {}^A\hat{K}$$

$${}^A b = (\theta + 2\pi) \, {}^A\hat{K}$$

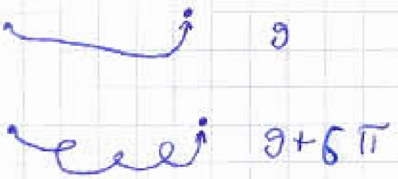
NOTAZIONE ASSE-ANGOLO

Quanto vale $R({}^A K)$ e quanto vale $R({}^A b)$? $R({}^A K) = R({}^A b)$

Stesso orientamento $\Rightarrow$ stesse matrici di rotazione



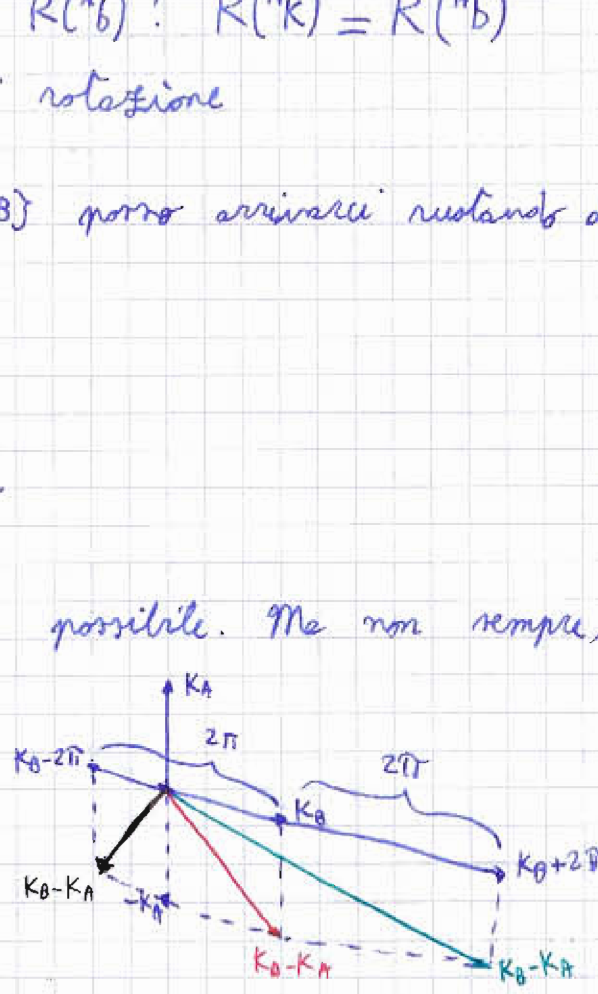
Quando arrivo a {B} posso arrivarci ruotando di θ o di $\theta + i2\pi$.



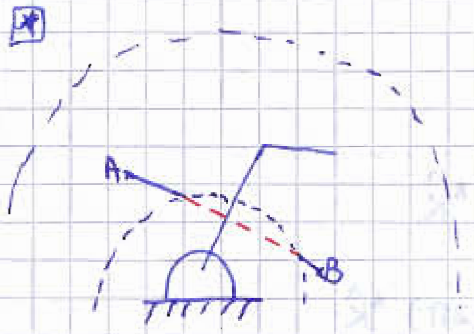
In generale vorrei il minor movimento possibile. Ma non sempre, se scelgo θ ho il movimento minimo.

Valuto $\|{}^0K_B - {}^0K_A\|$

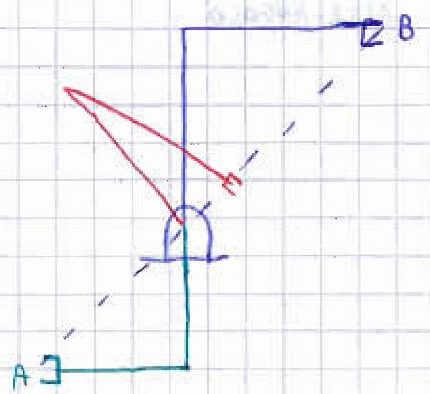
$$\underset{\theta - 2\pi}{\|K_B - K_A\|} < \underset{\theta}{\|K_B - K_A\|} < \underset{\theta + 2\pi}{\|K_B - K_A\|}$$



PROBLEMI DELLA PIANIFICAZIONE NELLO SPAZIO OPERATIVO



Traiettorie non possibili perché attraversano punti non appartenenti allo spazio di lavoro. Devo quindi controllare i punti immessi dall'operatore



Con la traiettoria passo molto vicino a un punto di singolarità cinematica.
Con lo Jacobiano controllo che non si passi vicino ai punti singolari.